Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke | Präsenzblatt 7

Aufgabe 1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Das n-te Kreisteilungspolynom Φ_n ist induktiv definiert als normiertes Polynom in $\mathbb{Z}[t]$ via

$$t^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(t).$$

Die Nullstellen von Φ_n in $\mathbb{C}$ sind die *primitiven* n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie Φ_6 explizit. Malen Sie ein Bild der primitiven sechsten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$.

(b) Finden Sie alle $n \in \mathbb{N}$, für welche Φ_n keine rationale Nullstelle hat. Zeigen Sie, dass Φ_5 auch in $\mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}[X]/(X^2+1)$ keine Nullstelle hat.

Hinweis: Nach Präsenzblatt 3 genügt es, dies über $\mathbb{Z}[i]$ zu zeigen.

(c) Sei $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass Φ_5 ebenfalls keine Nullstelle in $\mathbb{F}$ hat, hingegen aber schon in $\mathbb{F}(i) = \mathbb{F}[X]/(X^2+1)$.

Hinweis: Nach Aufgabe 59 (d) ist $\mathbb{F}^\times$ zyklisch. Sie dürfen benutzen, dass sich dies auf $\mathbb{F}(i)^\times$ verallgemeinert. Was ist jeweils die Kardinalität?

(d) Die Beträge der Koeffizienten von Φ_n sind ≤ 1 für alle $n < 105$ und ≤ 2 für alle $n < 385$. Zeigen Sie, dass jede gerade natürliche Zahl als Betrag eines Koeffizienten eines Φ_n auftritt.

Hinweis: Sei $r \in \mathbb{N}$ ungerade. Es gibt ungerade Primzahlen $p_1 < \ldots < p_r$ mit $p_1 + p_2 > p_r$.[1] Sei nun $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$. Berechnen Sie den Koeffizienten von t^{p_r} in $\Phi_n(t)$, indem Sie die Gleichung

$$\Phi_n(t) = \prod_{d|n} (t^{n/d} - 1)^{\mu(d)}$$

aus Aufgabe 79 (b) in $\mathbb{R}[t]/(t^{p_r+1})$ betrachten.

[1] In der Tat gilt folgende Verallgemeinerung des Bertrand'schen Postulates. Es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit $\pi(2x) - \pi(x) \geq c \cdot \frac{x}{\ln x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ die Primzahlen $\leq x$ zählt. Dies kann man auch ohne die Verwendung des Primzahlsatzes zeigen.