

Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke

Präsenzblatt 6

Aufgabe 1. Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen als $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\frac{1}{i-1}, \quad \frac{(i+1)(i+2)}{i}, \quad (5-3i)^2.$$

Aufgabe 2. Es sei R ein Ring und $R[X]$ die Menge der Polynome in einer Unbestimmten mit Koeffizienten in R .

- (a) Beweisen Sie: Die übliche Addition und Multiplikation von Polynomen statuten $R[X]$ mit der Struktur eines Ringes aus.
- (b) Identifizieren Sie die Menge der Ringhomomorphismen $\mathbb{Z}[X] \rightarrow R$ mit R selbst.
- (c) Sei K ein Körper. Bestimmen Sie die Einheitengruppe von $K[X]$. Was ist die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}[X]$?
- (d) Geben Sie unendlich viele Beispiele von nicht-linearen additiven Polynomen an, d.h. $f \in K[X]$ vom Grade > 1 mit $f(Y+Z) = f(Y) + f(Z)$ als Polynom in zwei Unbestimmten Y, Z . *Hinweis:* Betrachten Sie $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3. Ist S eine Menge n paarweise verschiedener reeller Zahlen, so bezeichnen wir mit A_S die Menge derjenigen Zahlen, welche als arithmetisches Mittel zweier unterschiedlicher Elemente von S auftreten.

Bestimmen Sie für gegebenes $n \geq 2$ die kleinstmögliche Kardinalität von A_S .

Aufgabe 4.

- (a) Folgern Sie aus dem Fundamentalsatz der Algebra, dass jedes normierte Polynom in $\mathbb{R}[X]$ sich als Produkt linearer und irreduzibler quadratischer reeller Polynome schreiben lässt.
- (b) Zeigen Sie, dass das Polynom $X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ irreduzibel ist.
- (c) Konstruieren Sie einen Isomorphismus von Ringen

$$\mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 1) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

- (d) Sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ und $\Phi = 1 + \zeta + \bar{\zeta}$. Malen Sie ein Bild von Φ . Erinnern Sie sich, dass $-\Phi = \zeta^2 + \bar{\zeta}^2$ ist. Zeigen Sie, dass Φ der goldene Schnitt ist.
- (e) Zerlegen Sie das Polynom $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ in $\mathbb{R}[X]$ in irreduzible Faktoren.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass die komplexe Konjugation neben der Identität der einzige stetige Ringhomomorphismus $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist.