Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke Präsenzblatt 5

Aufgabe 1. Es sei $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ der in Aufgabe 69 definierte Quotient.

(a) Malen Sie ein Bild von $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(b) Beweisen Sie: Jede Äquivalenzklasse in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ enthält genau ein $0 \leq x < 1$.

(c) Geben Sie eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und dem Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ an. Was ist das Bild von $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z},\ x \mapsto (x + \mathbb{Z})$, unter dieser Bijektion?

(d) Sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass x genau dann irrational ist, wenn die Menge

$$\{(nx + \mathbb{Z}) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

dicht im Einheitskreis liegt.

Aufgabe 2. Zerlegen Sie folgende Polynome in $\mathbb{R}[X]$ in irreduzible Faktoren.

$$f(X) = 2X^4 + 7X^2 + 3$$
$$g(X) = X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 - 2X^2 - \frac{1}{2}X + 1$$