Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke Präsenzblatt 3

Aufgabe 1. Sei R ein Ring.

(a) Zeigen Sie, dass es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$ gibt.

(b) Gibt es einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}[i]$?

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Angenommen es gäbe einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: $1 = 0$.

Aufgabe 2. Es sei $f(x) = x^{n+1} + c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0$ ein normiertes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie: Ist $f(\frac{a}{b}) = 0$ eine rationale Nullstelle, so gilt tatsächlich $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$.

(b) Finden Sie unendlich viele Gegenbeispiele im Falle von Polynomen mit Leitkoeffizient $\neq 1$.

(c) Stimmt die Aussage in (a) auch, wenn wir $\mathbb{Z}$ durch $\mathbb{Z}[i]$ und $\mathbb{Q}$ durch

$$\mathbb{Q}(i) = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$$

ersetzen?

Aufgabe 3. Eine algebraische Zahl ist definiert als die (komplexe) Nullstelle eines normierten Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar ist.