Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke | Präsenzblatt 2

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie, dass folgende Abbildung wohldefiniert ist.

$$\sigma \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ \overline{(a,b)} \longmapsto \overline{(a^2+b^2, 2ab)}$$

(b) Ist σ injektiv/surjektiv/bijektiv?

(c) Respektiert σ die additive/multiplikative Struktur auf $\mathbb{Z}$?

Aufgabe 2. Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks. Zeigen Sie:

$$a \cdot b \cdot c \equiv 0 \bmod 60.$$

Hinweis: Betrachten Sie die pythagoräische Gleichung modulo der Primpotenzteiler von 60.

Aufgabe 3. Für $n \in \mathbb{N}$ sei μ_n die Menge der n-ten Einheitswurzeln.

(a) Sei n gerade. Verwenden Sie Achsenspiegelungen, um zu zeigen, dass gilt

$$\sum_{\zeta \in \mu_n} \zeta = 0.$$

Was können Sie auf diesem Wege für ungerades n folgern?

(b) Beweisen Sie die Aussage für beliebiges n mit Hilfe des Satzes von Vieta für das Polynom $x^n - 1$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie $(2+7i)(1-i)$ in $\mathbb{Z}[i]$.