Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke | Präsenzblatt 11

Aufgabe 1.

(a) Gegeben sei die folgende Wahrheitstafel.

X	Y	(A)
$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$

Finden Sie eine Formel für (A), welche nur aus X, Y, $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ besteht.

(b) Welche der folgenden aussagenlogischen Terme sind Tautologien?

- $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y)$
- $(X \rightarrow \neg Y) \wedge (\neg X \rightarrow \neg Y)$

Aufgabe 2. Seien A und B Mengen.

(a) Beweisen Sie folgende Aussagen oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

- $A \cup B = B \cup (A \setminus B)$.
- $A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.
- $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

(b) Seien A und B endlich. Beweisen Sie folgende Formel für die Kardinalitäten.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Malen Sie ein passendes Venn-Diagramm. Erläutern Sie, weshalb die Formel für unendliche Mengen keinen Sinn macht.

Aufgabe 3. Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung von Mengen.

(a) Beweisen Sie, dass f genau dann surjektiv ist, wenn für alle $C \subseteq B$ gilt

$$f(f^{-1}(C)) = C.$$

(b) Überprüfen Sie, ob folgende Abbildungen injektiv/surjektiv sind.

- $\mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ a \mapsto -a$.
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (a, b) \mapsto a + b$.
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ (a, x) \mapsto ax$.
- $\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sqrt{z}$.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Wir bezeichnen mit $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$ die n-te Dreieckszahl. Beweisen Sie:

$$\Delta_n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

(b) Seien $p_1, \dots, p_n$ Primzahlen, und $0 \leq e_1, \dots e_n, f_1, \dots f_n$ natürliche Zahlen. Bestimmen Sie $m_1, \dots, m_n$ mit

$$\mathrm{ggT}(\prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i}, \prod_{i=1}^{n} p_i^{f_i}) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{m_i}.$$

(c) Bestimmen Sie die Endziffer von $12^{345^{6789}} \cdot 98^{765^{4321}}$.

(d) Finden Sie alle ungeraden Zahlen $a \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv 4 \bmod 7$ und $a \equiv 3 \bmod 9$.

Aufgabe 5.

(a) Konstruieren Sie einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

(b) Gibt es einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$?

(c) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$.

Aufgabe 6. Überprüfen Sie, welche der folgenden Abbildungen die Struktur einer Gruppe auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren.

$$(x, y) \mapsto \sqrt{xy}, \qquad (x, y) \mapsto \frac{xy}{2}, \qquad (x, y) \mapsto \frac{x}{y}.$$

Aufgabe 7.

(a) Finden Sie die reellen Nullstellen des Polynoms $X^2 + 10X - 7$.

(b) Folgern Sie, dass $\sqrt[5]{5} < \sqrt{2}$ ist.

(c) Seien $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ paarweise verschiedene irrationale Zahlen mit $xyz \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass keines der paarweisen Produkte der x, y, z rational ist. Geben Sie ein Beispiel von x, y, z an.

(d) Zerlegen Sie folgende Polynome in irreduzible Faktoren.
- $X^3 + \frac{1}{2}X^2 + 4X + 2$ in $\mathbb{R}[X]$ und $\mathbb{C}[X]$.
- $X^3 + X^2 - e^{2\pi i/3}X - e^{2\pi i/3}$ in $\mathbb{C}[X]$.

(e) Finden Sie die normierte quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten, welcher $\cos(\frac{2\pi}{5})$ genügt.

Aufgabe 8. Gegeben ein Viereck, dessen Seiten tangential an einem Kreis liegen. Zeigen Sie, dass der Mittelpunkt des Kreises auf der Geraden durch die Mittelpunkte der Diagonalen des Vierecks liegt.