Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke | Präsenzblatt 10

Aufgabe 1. Sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^3 + aX^2 + a^2X + 7\left(\frac{a}{3}\right)^3$$

in der Darstellung als Real- und Imaginärteil.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, und $f = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X]$. Die formale Ableitung f' von f ist definiert als

$$f' = \sum_{k=0}^{n} k \cdot a_k X^{k-1} \in K[X].$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\delta\colon K[X] \to K[X]$, $f \mapsto f'$, ein Homomorphismus additiver Gruppen ist. Ist δ ein Ringhomomorphismus?

(b) Sei $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, und $f = \Phi_7$ das siebte Kreisteilungspolynom. Zerlegen Sie die formale Ableitung f' in $K[X]$ in irreduzible Faktoren.

Aufgabe 3. Seien $y, z \in \mathbb{C}$ mit $|y| = 1$, $y \neq 1$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\rho\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x \mapsto xy + z,$$

eine Drehung um einen Punkt beschreibt (und bestimmen Sie diesen).

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass es Rechtecke gibt, welche sich nicht disjunkt in zueinander kongruente gleichschenklige Dreiecke zerlegen lassen.
Hinweis: Was ist die Kardinalität der Menge aller möglichen auftretenden Dreiecke bis auf Ähnlichkeit? (Betrachten Sie hierzu die möglichen Winkel des Dreiecks an einer Ecke des Rechtecks). Vergleichen Sie diese mit der Kardinalität der Menge aller Rechtecke mit fixiertem Verhältnis der Seitenlängen, und folgern Sie daraus die Behauptung.