Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke — Präsenzblatt 1

Aufgabe 1. Ist die folgende Operation auf den ganzen Zahlen wohldefiniert?

$$\overline{(a,b)} \boxdot \overline{(a',b')} = \overline{(a \cdot a' + b \cdot b', a + a' + b + b')}$$

Aufgabe 2. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Stellen Sie sich den Einheitskreis

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

in der reellen Ebene als eine Uhr mit n Stunden vor. Die Ziffern sind gegeben durch die n-ten Einheitswurzeln

$$\mu_n = \big\{ \big(\cos\big(\frac{2\pi a}{n}\big), \sin\big(\frac{2\pi a}{n}\big)\big) \mid 0 \leq a < n \big\}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mu_n, \ (a + n\mathbb{Z}) \longmapsto \big(\cos\big(\frac{2\pi a}{n}\big), \sin\big(\frac{2\pi a}{n}\big)\big),$$

eine wohldefinierte Bijektion ist. Dies definiert auf μ_n die Struktur einer Gruppe. Überlegen Sie sich, dass diese Operation durch Rotationen des Einheitskreises gegeben ist.

(b) Formalisieren Sie folgende Aussage: „Egal wie wir die Ziffern der Uhr permutieren, wir können den Zeiger immer eindeutig auf die richtige Uhrzeit stellen“, und nutzen Sie diese, um induktiv zu beweisen, dass

$$|\mathfrak{S}(\mu_n)| = n!$$

ist.

Aufgabe 3. Finden Sie alle ganzen Zahlen $a \in \mathbb{Z}$ mit Endziffer 7, für die

$$a \equiv 5 \bmod 7$$

ist.