Musterlösung Blatt 9

Aufgabe 86 Seien $x, y \in \mathbb{C}$ zwei Punkte auf dem Einheitskreis. T_x sei die Tagente des Einheitskreises an x.

a) Um den Schnitt $T_x \cap \mathbb{R}$ zu berechnen muss man zunächst T_x parametrisieren.
Wenn T_x Aangential zum Einheitskreis ist muss T_x orthogonal zu der Geraden sein, die durch den Ursprung und x geht ($\mathbb{R}x$).

Beh: $(1+i)x \in T_x$.

Bew: Nach 85b) muss für $a, b \in \mathbb{R}x$; $c, d \in T_x$ gelten, dass

$$\frac{\overline{a-b}}{a-b} = \frac{\overline{c-d}}{d-c}.$$

Da $0, x \in \mathbb{R}x$ und $x \in T_x$ kann man berechnen.

$$\frac{\overline{x-0}}{x-0} = \frac{\bar{x}}{x} = -\frac{-i}{i}\cdot\frac{\bar{x}}{x} = -\frac{\overline{ix}}{ix} = -\frac{\bar{x}+\overline{ix}-\bar{x}}{x+ix-x}$$

$$= -\frac{\overline{(1+i)x}-\bar{x}}{(1+i)x-x} = \frac{\overline{(1+i)x-x}}{x-(1+i)x}$$

Somit ist die Gerade durch x und $(1+i)x$ orthogonal zu $\mathbb{R}x$ und es gilt.

$$T_x = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + t((1+i)x - x) \text{ für } t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + itx;\ t \in \mathbb{R}\}$$

Sei also $z \in T_x \cap \mathbb{R}$, dann muss $z = x + t(ix)$ für ein bestimmtes $t \in \mathbb{R}$. Für $x = a+bi$ ist der Term

$$z = (a+bi) + t(i(a+bi)) = a+bi+iat-bt = a-bt+i(at+b).$$

Soll $z \in \mathbb{R}$ gelten, so muss $ta+b=0$ gelten.

1. Fall: $a=0$ (also $x \in \{\pm i\}$), dann kann $b=0$ nicht erfüllt sein. Somit ist $T_x \cap \mathbb{R} = \emptyset$.

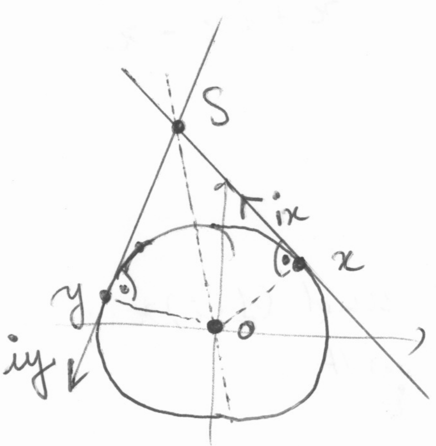
2. Fall: $a \neq 0$, dann muss $t = -\frac{b}{a}$ sein und somit

$$z = a - bt = a + \frac{b^2}{a}$$

Dann ist $T_x \cap \mathbb{R} = \left\{ a + \frac{b^2}{a} \right\} = \left\{ \frac{a^2+b^2}{a} \right\} = \left\{ \frac{1}{a} \right\} = \{(\operatorname{Re} x)^{-1}\}$

b) zu zeigen, T_x und T_y schneiden sich im Punkt $\frac{2xy}{x+y}$ (für $x \neq -y$).

Folgende Skizze verschaulicht die Situation:



Es gilt: $S = x + tix$ für ein $t \in \mathbb{R}$

$S = y + t'ix$ für ein $t' \in \mathbb{R}$.

Man muss prüfen, inwieweit t und t' miteinander zu tun haben.

Dann vergleicht man die beiden Dreiecke OSx und OSy. Die Strecke $\overline{SO}$ haben beide gemeinsam und auch die Strecken $\overline{xO}$ und $\overline{yO}$ sind gleich lang. Da beide Dreiecke den $90°$-Winkel gemeinsam haben, müssen sie schon kongruent sein, d.h. der Abstand $\overline{Sx}$ ist gleich $\overline{Sy}$.

Somit gilt
$$\begin{aligned} |S-x| &= |x+tix-x| = |t|\cdot|x| = |t| \\ &\parallel \\ |S-y| &= |y+it'y-y| = |t'||y| = |t'| \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad t = \pm t'$

Wir wollen zeigen, dass $t = -t'$. Das ist im Bild klar. Formal nutzen wir den Zwischenwertsatz.

Wir wählen y auf dem Einheitskreis fest aber beliebig. Nun gibt es für jedes x auf dem Einheitskreis mit $x \neq y$ und $x \neq -y$ genau einen Schnittpunkt der Tangenten T_x und T_y, der jeweils zwei Parameter t_y und t_x erzeugt.

Die Abbildung, die $x \longmapsto t_y \cdot t_x$ schickt ist stetig, da der Schnittpunkt stetig von x abhängt für $x \neq y$ und $x \neq -y$, die Parameter stetig vom Schnittpunkt abhängen und das Produkt stetig ist.

Für $x = iy$ und $x = -iy$ ist das Produkt von t_x und t_y negativ. Da ~~die~~ keiner der Parameter gleich Null werden kann, muss der Produkt die gesamte Zeit negativ sein. Dann muss aber genau einer der Faktoren negativ sein.

Somit $t_x = -t_y$ und $t = -t'$.

D.h. die Gleichungen werden zu:

$$S = x + tix \quad , \quad S = y - ity .$$

$$\Rightarrow \quad x + itx = y - ity$$

$$\Rightarrow \quad it(x+y) = y - x$$

$$\Rightarrow \quad t = -\frac{y-x}{x+y} i = \left(\frac{x-y}{x+y}\right) i$$

Wiedereinsetzen gibt:

$$S = x + i\left(\frac{x-y}{x+y}\right) ix$$

$$= \frac{x(x+y)}{x+y} - \frac{x^2 - yx}{x+y} = \frac{x^2 + xy - x^2 + xy}{xy} = \frac{2xy}{x+y} . \quad \square$$

Es gibt eine einfacher Lösung für die Aufgabe 86 b). Man prüft mit Hilfe der 85a), dass der Punkt $\frac{2xy}{x+y}$ sowohl ~~ob~~ auf der Geraden $\overline{T_x}$, als auch $\overline{T_y}$ liegt.

Um die Aufgabe 85a) zu verwenden müssen wir zwei verschiedene Punkte auf $\overline{T_x}$ angeben und prüfen, ob $z = \frac{2xy}{x+y}$ die Gleichung erfüllt. Man kann <u>nicht</u> x und den in 86a) errechneten Schnittpunkt S nehmen, da für $x \in \mathbb{R}$ gilt ~~R~~ $x = S$ und für $x = i$ oder $x = -i$ gibt es keinen Schnittpunkt.

~~Nach~~ In 86a) wurde gezeigt, dass $x' = ix + x$ auch auf $\overline{T_x}$ liegt. Somit ~~sun~~ folgt für die Gleichung:

$$\frac{\overline{\left(\frac{2xy}{x+y}\right)} - \overline{x}}{\frac{2xy}{x+y} - x} = \frac{\overline{ix+x} - \overline{x}}{ix+x-x} \quad \left(\text{gdw. } \frac{2xy}{x+y} \in \overline{T_x}.\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2\overline{xy}}{\overline{x}+\overline{y}} - \overline{x}}{\frac{2xy}{x+y} - x} = \frac{\overline{i}\,\overline{x}}{ix} = \frac{-i\,\overline{x}}{i\,x} = -\frac{\overline{x}}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\overline{xy}}{\overline{x+y}} x - \overline{x}x = -\frac{2xy}{x+y}\overline{x} + \overline{x}x$$

$$\Leftarrow\quad \frac{2\overline{xy}x}{\overline{x+y}} + \frac{2xy\overline{x}}{x+y} = 2x\overline{x} = 2$$

$$\Leftarrow\quad \frac{2\overline{y}}{\overline{x+y}} + \frac{2y}{x+y} = 2$$

$$\Leftarrow\quad \frac{2\overline{y}(x+y)}{(\overline{x+y})(x+y)} + \frac{2y(\overline{x+y})}{(x+y)(\overline{x+y})} = 2$$

$$\Leftarrow\quad \frac{2(\overline{y}x+y\overline{y}+y\overline{x}+y\overline{y})}{(\overline{x+y})(x+y)} = 2$$

$$\overset{\circledast}{\Leftarrow}\quad \overline{y}x+y\overline{y}+y\overline{x}+y\overline{y} = \overline{x}x+\overline{x}y+\overline{y}x+\overline{y}y$$

$$\Leftarrow\quad \overline{y}x+y\overline{x}+2 = \overline{y}x+y\overline{x}+2$$

Da die letzte Aussage wahr ist und alle Implikationen in die Richtung „$\Leftarrow$" gültig sind (für $\overset{\circledast}{\Leftarrow}$ wird $x+y\neq 0$ benutzt), ist auch die Gleichung vom Anfang korrekt. Nach 88a) gilt, dass $\frac{2xy}{x+y} \in T_x$.

Die Rechnung für T_y ist komplett analog, man ersetzt x durch y und y durch x.

Somit ist $\frac{2xy}{x+y} \in T_x \cap T_y$, sofern $x \neq -y$.

Aufgabe 87

Sei μ_n die Menge der n-ten Einheitswurzeln.
Sei O_2 die Menge der linearen eukl. Bewegungen im $\beta: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

a) • Die Komposition ist assoziativ. Es ist zu prüfen, ob wenn $\alpha, \beta \in O_2$ auch $\alpha \circ \beta \in O_2$.
Verkettung linearer Abbildungen ist linear:

• $\alpha \circ \beta(a+b) = \alpha(\beta(a+b)) = \alpha(\beta(a) + \beta(b)) = \alpha \circ \beta(a) + \alpha \circ \beta(b)$

• $\alpha \circ \beta(az) = \alpha(a\beta(z)) = a \cdot (\alpha \circ \beta)(z)$

Sind α, β eukl., so auch $\alpha \circ \beta$, denn für $x, y \in \mathbb{C}$:

$|x-y| = |\beta(x) - \beta(y)| = |\alpha(\beta(x)) - \alpha(\beta(y))| = |\alpha \circ \beta(x) - \alpha \circ \beta(y)|$

• Die Identität ist in O_2 und ist das neutrale Element.

• Zunächst ist β injektiv, denn $\beta(x) = \beta(y)$
$\Rightarrow |\beta(x) - \beta(y)| = 0 \Rightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow x = y$.
Da β injektiv und linear von einem 2-dim Vektorraum in sich selbst ist, muss β auch surjektiv sein (s. LA, Beweis durch Dimensionsformel).
Somit gibt es ein Inverses. Inverse von linearen Abbildungen sind linear.
Weiter gilt:

$$|\beta^{-1}(x) - \beta^{-1}(y)| \overset{\beta \text{ eukl.}}{=} |\beta(\beta^{-1}(x)) - \beta(\beta^{-1}(y))| = |x-y|$$

Somit ist für $\beta \in O_2$ auch $\beta^{-1} \in O_2$.

b) $D_n = \{\beta \in O_2 \mid \beta(\mu_n) = \mu_n\}$, d.h. die Menge der linearen, eukl. Bewegungen, die die Menge der n-ten Einheitswurzeln auf sich selbst abbilden.*

Es gilt für $\varsigma \in \mu_n$, das $\beta(\varsigma) \in \mu_n$ ($\beta(\mu_n) \subseteq \mu_n$) und für jede $\varsigma \in \mu_n$ gibt es $\varsigma' \in \mu_n$ mit $\beta(\varsigma') = \varsigma$ ($\beta(\mu_n) \supseteq \mu_n$).

Somit ist β eine Bijektion auf μ_n (wenn man β auf μ_n einschränkt).

D_n ist nach Konstruktion eine Teilmenge von O_2.

Die Komposition von zwei Elementen aus D_n ist wieder in D_n, denn

$$\alpha \circ \beta(\mu_n) \overset{\beta \in D_n}{=} \alpha(\mu_n) \overset{\alpha \in D_n}{=} \mu_n$$

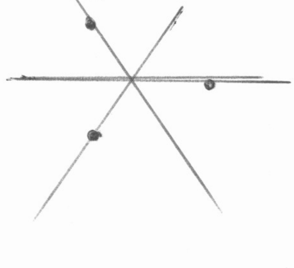
Das Inverse zu $\alpha \in D_n$ ist ebenfalls eine Bijektion auf μ_n. Somit auch in D_n.

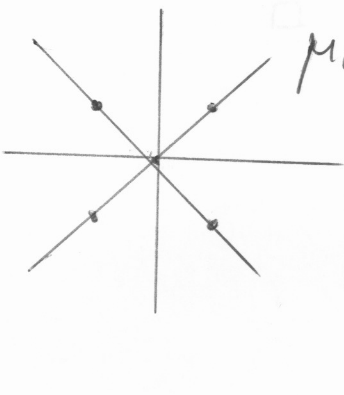
c) Wir müssen verschiedene Fälle betrachten.

<u>$n=1$</u>: $\mu_1 = \{1\}$. Sei $\beta \in D_1$, dann ist $\beta(1) = 1$, da 1 die einzige Einheitswurzel ist. $\beta(i)$ muss i oder $-i$ sein, damit der Abstand zur 0 gleich 1 ist und der Abstand zu 1 gleich $\sqrt{2}$ wie zuvor. Da eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung auf $\mathbb{C}$ durch ihre Werte auf i und 1 vollst. bestimmt ist, gibt es genau zwei Elemente in D_1.

<u>$n=2$</u>: Wieder gibt es zwei mögliche Bilder für i und dieses Mal auch zwei für 1, nämlich 1 und -1. Somit gibt es höchstens vier Abbildungen. Es gibt aber auch mindestens vier, nämlich die Identität, $-$Identität, komplexe Konjugation und $-$kompl. Konj..

<u>$n \geq 3$</u>: Ähnlich wie zuvor gibt es mind. $2n$ Abbildungen. Die Menge μ_n hat genau n Spiegelachsen





etc.

Die jeweilige Spiegelung ist eukl., linear und bijektiv auf μ_n, also in D_n. Die anderen n Abbildungen sind die Rotation ~~a~~ um den Winkel $\frac{2\pi k}{n}$ $(\hat{=} \frac{360°}{n}k)$ für $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Somit hat D_n mind. $2n$ Elemente.

D_n hat höchstens $2n$ Elemente, denn ~~$1 \in \mu_n$~~ sei $\beta \in D_n$. Da $1 \in \mu_n$ für jedes n gibt es n Möglichkeiten für $\beta(1)$.

Wegen $|\beta(i)| = |\beta(i) - \beta(0)| = |i - 0| = |i| = 1$ muss $\beta(i)$ auf dem Einheitskreis liegen.

Außerdem muss wegen

$$\sqrt{2} = |i - 1| = |\beta(i) - \beta(1)|$$

$\beta(i)$ auf dem Kreis von Radius $\sqrt{2}$ um $\beta(1)$ liegen. Da die Kreise nicht gleich sind gibt es höchstens zwei Schnittpunkte. Somit höchstens zwei Wahlen für $\beta(i)$.

$\Rightarrow$ $|D_n| = 2n$. $\square$

Aufgabe 88 Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Finden Sie die Nullstellen.

$p(X) = X^3 + 4X + 5$. Da die alternierende Summe der Koeffizienten 0 ist muss (-1) eine Nullstelle sein.

$$(X^3 + 4X + 5) : (X+1) = X^2 - X + 5$$
$$\begin{array}{l} X^3 + X^2 \\ \hline \quad -X^2 + 4X + 5 \\ \quad -X^2 - X \\ \hline \qquad\quad 5X + 5 \\ \qquad\quad 5X + 5 \\ \hline \qquad\qquad\ 0 \end{array}$$

$$X^2 - X + 5 = X^2 - X + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 5 = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} = 0$$
$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

$$p(X) = X^2 - e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot \sqrt[4]{48}\, X + 1 = X^2 - e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{3}\, X + 1$$

p-q-Formel:

$$X = e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot \sqrt[4]{3} \pm \sqrt{e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot \sqrt{3} - 1}$$
$$= e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot \sqrt[4]{3} \pm \sqrt{\sqrt{3}\, i - 1}$$

$$p(X) = X^{10} + aX^5 + b = (X^5)^2 + aX^5 + b$$
$$= \left(X^5 + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b = 0$$
$$\Rightarrow X^5 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

Sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, r der Betrag von $-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ und φ der Winkel, dann sind $X_k = \zeta^k \cdot \sqrt[5]{r} \cdot e^{\frac{i\varphi}{5}}$ alles Wurzeln für $k \in \{0, \dots 4\}$

denn $(X_k)^5 = ((e^{2\pi i/5})^k \cdot \sqrt[5]{r} \cdot e^{i\varphi/5})^5 = (e^{2\pi i})^k \cdot (\sqrt[5]{r})^5 \cdot (e^{i\varphi/5})^5$

$= 1^k \cdot r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot e^{i\varphi} = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$.

Analog erhält man für ~~Wurzelziehen~~ ~~zu~~ $-\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ weitere 5 Lösungen.

$p(X) = iX^3 + X^2 + iX + 1$.

i ist Nullstelle, denn $p(i) = i\,i^3 + i^2 + i \cdot i + 1$
$= 1 - 1 - 1 + 1 = \underline{0}$

$$\begin{array}{l} (iX^3 + X^2 + iX + 1) : (X - i) = iX^2 + i = i(X^2+1) \\ \underline{iX^3 + X^2} \\ \qquad\quad iX + 1 \\ \qquad\quad \underline{iX + 1} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Da $X^2 + 1 = (X+i)(X-i)$, sind die Nullstellen doppelt i und einfach $-i$.

b) Sei $\varsigma \in \mu_5$ und $\eta = e^{2\pi i/3}$. Es gilt

$e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos(\frac{2}{3}\pi) + i\sin(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2} + i\sin(\frac{2}{3}\pi)$.

Somit ist der Realteil von η gleich $-\frac{1}{2}$.

Da $\varsigma \in \mu_5$ gilt: $\varsigma^5 - 1 = 0$, aber $\varsigma^5 - 1 = (\varsigma - 1)(\varsigma^4 + \varsigma^3 + \varsigma^2 + \varsigma + 1)$,

d.h. für $\varsigma \neq 1$ ist $\varsigma^4 + \varsigma^3 + \varsigma^2 + \varsigma + 1 = 0$.

Man berechnet:

$$(X^2 - \rho\eta)(X^2 - \rho\bar{\eta}) + \rho + 1$$

$$= X^4 - (\rho(\eta + \bar{\eta}))X^2 + \rho^2 \eta\bar{\eta} + \rho + 1 \qquad \Big| \ \eta \cdot \bar{\eta} = |\eta|^2 = 1^2 = 1, \text{ da } |\eta| = 1.$$

$$= X^4 - \rho(2\,\mathrm{Re}\,\eta)X^2 + \rho^2 + \rho + 1 \qquad \Big| \ \eta + \bar{\eta} = 2\,\mathrm{Re}(\eta) = -1$$

$$= X^4 + \rho X^2 + \rho^2 + \rho + 1$$

Sei nun $\rho \neq 1$. Dann ist ρ Nullstelle des Polynoms.

$$(X^4 + \rho X^2 + \rho^2 + \rho + 1) : (X - \rho) = X^3 + \rho X^2 + (\rho + \rho^2)X + \rho^2 + \rho^3$$

$$\begin{aligned}
&\underline{X^4 - \rho X^3} \\
&\rho X^3 + \rho X^2 + \rho^2 + \rho + 1 \\
&\underline{\rho X^3 - \rho^2 X^2} \\
&(\rho + \rho^2)X^2 + \rho^2 + \rho + 1 \\
&\underline{(\rho + \rho^2)X^2 - (\rho^2 + \rho^3)X + \rho^2 + \rho + 1} \\
&(\rho^2 + \rho^3)X + \rho^2 + \rho + 1 \\
&\underline{(\rho^2 + \rho^3)X - \rho^4 - \rho^3} \\
&\rho^4 + \rho^3 + \rho^2 + \rho + 1 \overset{\rho \neq 1}{=} \underline{\underline{0}}
\end{aligned}$$

D.h. das Polynom ist:

$$(X - \rho)\left(X^3 + \rho X^2 + (\rho + \rho^2)X + (\rho^2 + \rho^3)\right) \quad \text{für } \rho \neq 1.$$

Für $\rho = 1$ erhält man

$$X^4 + X^2 + 3 = \left(X^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 3 = 0$$

$$\Rightarrow X^2 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{11}{4}} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

$\Rightarrow$ D.h. das Polynom ist:

$$\left(X^2 + \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{11}}{2}\right) \cdot \left(X^2 + \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$$

c) <u>1. Lösung</u>: Über die p-q-Formel:

$$X^2-(2a-b)X+(a^2-ab+b^2) = 0$$

$$\Rightarrow X = \frac{2a-b}{2} \pm \sqrt{\frac{(2a-b)^2}{4} - a^2+ab-b^2}$$

$$= a-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{4a^2-4ab+b^2}{4} - a^2+ab-b^2}$$

$$= a-\frac{b}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}b^2} = a-\frac{b}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}b$$

$$= a+b\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= a+b\,e^{\frac{2}{3}\pi i},\quad a+b\,e^{\frac{4}{3}\pi i}$$

Es gilt, dan $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2}{3}\pi i}$, $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4}{3}\pi i}$.

Da der Ausdruck in der Wurzel für $b \neq 0$ im reellen keine Lösung hat ist das Polynom über bereits zerlegt. Über $\mathbb{C}$ ~~ergi~~ ergibt sich die Zerlegung aus den Nullstellen.
Für $b=0$ ist das Polynom $X^2-2a+a^2=(X-a)^2$.

<u>2. Lösung</u> Multipliziere mit $X-(a+b)$.

$$(X^2-(2a-b)X+a^2-ab+b^2)(X-(a+b))$$

$$= X^3-(2a-b)X^2+(a^2-ab+b^2)X$$

$$-\left[(a+b)X^2-(2a-b)(a+b)X+(a^2-ab+b^2)(a+b)\right]$$

$$= \underbrace{X^3-3aX^2+3a^2X-a^3}_{\text{Binomische Lehrsatz}}-b^3$$

$$= (X+(-a))^3 - b^3$$

Sei das gleich 0, dann muss gelten

$(X-a)^3 = b^3$, nenne $y := (X-a)$ ~~und ab~~^{3}

$\rightsquigarrow$ $y^3 = b^3$. Das ist eine Polynomielle Gleich. vom Grad 3, d.h. wenn z eine Lösung ist, dann sind auch $e^{\frac{2}{3}\pi i} z$ und $e^{\frac{4}{3}\pi i} z$ Lösungen und es kann höchstens 3 geben.

Da $y = b$ eine Lösung ist, und $b = y = X - a$ ist $X = a + b$ eine Lösung. (Das war klar, da mit $X-(a+b)$ multipliziert wurde)

Nun ist $e^{\frac{2}{3}\pi i}(X-a) = b$ auch eine Lösung,

$\Leftrightarrow X - a = e^{\frac{4}{3}\pi i} b \Leftrightarrow X = a + e^{\frac{4}{3}\pi i} b$

Ebenso $e^{\frac{4}{3}\pi i}(X-a) = b$, $\Leftrightarrow X = a + e^{\frac{2}{3}\pi i} b$.

Man erhält die selben Nullstellen und somit die gleiche Zerlegung wie beim Lösung 1.

Bei 1. Lösung ist es schwierig zu sehen, dass $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ ist, wenn man es nicht weiß. Somit bleibt möglicherweise ein langer, komplizierter Term stehen. Somit ist der Hinweis nützlich.