Musterlösung Blatt 8

Aufgabe 82

a) Stellen Sie die Zahlen in Polarkoordinaten dar.

1. $\sin\alpha + i\cos\alpha = i^4(\sin\alpha + i\cos\alpha)$

$= i(+\cos\alpha - i\sin\alpha) = i\,\overline{(e^{i\alpha})}$

$= e^{i\frac{\pi}{2}}\,\overline{e^{i\alpha}}$

Da $e^{i\alpha}$ Betrag 1 hat ist $\overline{e^{i\alpha}} = (e^{i\alpha})^{-1}$.

Somit

$= e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i(-\alpha)} = e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$

Insgesamt ist

$\sin\alpha + i\cos\alpha = (1; \frac{\pi}{2} - \alpha)$

2. $i^n = \cancel{i\sin(\frac{\pi}{2}n)} + \cos(\frac{\pi}{2}n) = e^{i\frac{\pi}{2}n}$

Somit $i^n = (1; \frac{\pi}{2}n) = (1; \frac{\pi}{2}r)$ mit $r \equiv n \pmod 4$

3. Berechne Argument und Betrag getrennt.

$|\sqrt{15} + i\sqrt{5}| = \sqrt{\sqrt{15}^2 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Das Argument ist $\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Somit $\sqrt{15} + i\sqrt{5} = (2\sqrt{5}; \frac{\pi}{6})$

4. Der Betrag von $z = (1+i)\sqrt{6} - (1-i)\sqrt{2} = \sqrt{6} - \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ ist

$|z| = \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2} = \sqrt{6+2+6+2} = \sqrt{16} = 4.$

Das Argument ist $\arcsin\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{5\pi}{12}$, also

$z = (4; 5\frac{\pi}{12})$.

b) Definiere $q := \sqrt{r}\cdot e^{i\frac{\alpha}{2}}$. Es gilt $q^2 = r\cdot e^{i\alpha}$, aber $\sqrt{r}\cdot e^{i(\frac{\alpha}{2}+\pi\cdot k)}$ ist auch eine Quadratwurzel.

c) Schreibe $2\sqrt{\sqrt{3}+i} = a+bi$ mit $a,b\in\mathbb{R}$.

Zunächst $\sqrt{\sqrt{3}+i}$. $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$.

Das Argument von $\sqrt{3}+i$ ist $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

Somit ist $\sqrt{3}+i = 2\cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$

Nach der Definition in b) ist nun

$\sqrt{\sqrt{3}+i} = \sqrt{2}\cdot e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k)}$ und $2\sqrt{\sqrt{3}+i} = 2\sqrt{2}\, e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k)}$

$\cancel{= 2\sqrt{2}\,(\cos(}$

$\cancel{= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k\right)\right)}$

$\cancel{= \underbrace{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)}_{a} + i\underbrace{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)}_{b}}$

$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\,2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \lor -2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-i\,2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Aufgabe 83

a) z.z.: Die Abbildung $\beta_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $a+bi \mapsto av+bw$ ist genau dann euklidisch, wenn v und w auf dem Einheitskreis liegen und ihr Skalarprodukt gleich 0 ist, d.h. für $v = e+fi$, $w = g+hi$ ist $eg+fh = 0$.

Beweis: Nenne $\beta_A = \beta$. Seien $x = a+bi$, $y = c+di$ in $\mathbb{C}$, dann ~~mit~~ muss gelten:

$\cancel{(a-c)^2+(b-d}$

$$a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2 = (a-c)^2+(b-d)^2$$

$$= |a-c+i(b-d)|^2 = |a+bi-(c+di)|^2 = |x-y|^2$$

$$\overset{\text{eukl.}}{=} |\beta(x)-\beta(y)|^2 = |av+bw-cv-dw|^2$$

$$= |a(e+fi)+b(g+hi)-c(e+fi)-d(g+hi)|$$

$$= |(a-c)e+(b-d)g+i[(a-c)f+\cancel{d}(b-d)h]|$$

$$= ((a-c)e+(b-d)g)^2+((a-c)f+(b-d)h)^2$$

$$= (a-c)^2e^2+2(a-c)(b-d)eg+(b-d)^2g^2$$
$$+(a-c)^2f^2+2(a-c)(b-d)fh+(b-d)^2h^2$$

$$= (a-c)^2(e^2+f^2)+(b-d)^2(g^2+h^2)+2(a-c)(b-d)(eg+fh)$$

Wir haben also für beliebige $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ die Gleichung:

$$(a-c)^2+(b-c)^2 = (a-c)^2(e^2+f^2)+(b-d)^2(g^2+h^2)+2(a-c)(b-d)(eg+fh)$$

Somit erhält man für $a=c$ und $b\neq d$, dass $(b-d)^2 = (b-d)^2(g^2+h^2)$ und somit $|w| = g^2+h^2 = 1$.
Analog mit $a\neq c$ und $b=d$ erhält man $|v|=1$.
Die Gleichung vereinfacht sich zu:

$$(a-c)^2+(b-d)^2 = (a-c)^2+(b-d)^2+2(a-c)(b-d)(eg+fh)$$

Daraus folgt, dass

$$2(a-c)(b-d)(eg+fh) = 0.$$

Wählt man $a\neq c$ und $b\neq d$, ~~so~~ so folgt $eg+fh=0$, also ist das Skalarprodukt von v und w gleich 0.

„$\Leftarrow$" Sei $|v|=|w|=1$ und Skalarprodukt 0, also $e^2+f^2=g^2+h^2=1$ und $eg+fh=0$.
Dann gilt

$$|x-y|^2 = (a-c)^2+(b-d)^2 = (a-c)^2\cdot 1+(b-d)^2\cdot 1+2(a-c)(b-d)\cdot 0$$
$$= (a-c)^2(e^2+f^2)+(b-d)^2(g^2+h^2)+2(a-c)(b-d)(eg+fh)$$
$$= (a-c)^2e^2+2(a-c)(b-d)eg+(b-d)g^2$$
$$+(a-c)^2f^2+2(a-c)(b-d)fh+(b-d)h^2$$
$$= ((a-c)e+(b-d)g)^2+((a-c)f+(b-d)h)^2$$
$$= |(a-c)e+(b-d)g+i[(a-c)f+(b-d)h]|^2$$
$$= |(a-c)(e+if)+(b-d)(g+ih)|^2 = |(a-c)v+(b-d)w|^2$$
$$= |av+bw-cv-dw|^2$$
$$= |\beta(a+ib)-\beta(c+id)|^2 = |\beta(x)-\beta(y)|^2.$$

Da der Betrag ≥ 0 ist folgt durch Wurzelziehen, dass $|x-y| = |\beta(x)-\beta(y)|$.

b) Da v, w ~~Baum~~ Betrag 1 haben ist $r = 1$.

Sei also $v = r_v \cdot e^{i\alpha}$, dann ist $v = e^{i\alpha}$ $= \cancel{\sin(\alpha) + i\cos}$
$= \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$

Und $w = r_w \cdot e^{i\beta} = e^{i\beta} = \cos(\beta) + i\sin(\beta)$.

Da $\langle v, w \rangle = 0$ ist ist $\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) = 0$

Da $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ und $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$ ist gilt:
$$0 = \cos(-\alpha)\cos(\beta) - \sin(-\alpha)\sin(\beta).$$

Nach Additionstheorem ist das gerade
$$\cos(\beta - \alpha) = 0$$

Die einzigen Nullstellen des Cosinus (auf $-\pi$ bis π) sind $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, d.h.

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{2} \lor \beta - \alpha = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} + \alpha \lor \beta + \frac{\pi}{2} = \alpha$$

<u>1. Fall:</u> $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$

$$\Rightarrow w = e^{i\beta} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = e^{i\frac{\pi}{2} + i\alpha} = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\alpha} = ie^{i\alpha} \#$$

<u>2. Fall:</u> $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow w = e^{i\beta} = e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})} = e^{i\alpha} \cdot (e^{\frac{\pi}{2}})^{-1} = e^{i\alpha} \cdot i^{-1} = e^{i\alpha} \cdot (-i).$$

c) Sei $\beta: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ linear und euklidisch, dann ist

$$\beta(a+bi) = \beta(a+0i) + \beta(0+bi)$$
$$= \beta(a) + \beta(bi) = a\beta(1) + b\beta(i),$$

d.h. β ist schon durch seine Werte bei 1 und i vollkommen bestimmt.

Sei $\beta(1) =: v$ und $\beta(i) =: w$, dann ist

$\beta(a+bi) = av + bw$. Das war zu zeigen.

d) Definiere $\beta: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $a+bi \mapsto (a+1)+bi$ die Verschiebung um 1 nach „rechts".

z: β ist eukl. aber nicht-linear.

$$|\beta(x) - \beta(y)| = |(a+1)+bi - (c+1) - di| = |a+bi - (c+di)|$$
$$= |x-y|$$

aber

$$1 = \beta(0+0i) = \beta(0) = \beta(0+0)$$
$$\neq$$
$$2 = 1+1 = \beta(0) + \beta(0),$$

somit nicht-linear.

Aufgabe 84

Seien $x, y \in \mathbb{C}$ zwei Punkte auf dem Einheitskreis. Ist z auf der Geraden durch x und y, so ist

$$\bar{z} = \frac{x+y-z}{xy}.$$

Beweis:

Da x, y auf dem Einheitskreis liegen ist auch $x \cdot y$ auf dem Einheitskreis und es gilt

$$x \cdot \bar{x} = |x|^2 = 1, \quad y\bar{y} = |y|^2 = 1, \quad xy \cdot \overline{xy} = |xy|^2 = 1$$

Außerdem bedeutet die Tatsache, dass z auf der Geraden liegt, dass $z = x + t(y-x)$ für ein geeignetes $t \in \mathbb{R}$.

Nun gilt:

$$\frac{x+y-z}{xy} = \frac{x+y-z}{xy} \cdot \frac{\overline{xy}}{\overline{xy}} = \frac{(x+y-z)(\overline{xy})}{\underbrace{xy\,\overline{xy}}_{=1}} = (x+y-z)(\overline{xy})$$

$$= x\overline{xy} + y\overline{xy} - z\overline{xy} = \bar{y} + \bar{x} - z\overline{xy} = \bar{y} + \bar{x} - (x + t(y-x))\overline{xy}$$

$$= \bar{y} + \bar{x} - x\overline{xy} - ty\overline{xy} + tx\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y} - \bar{y} - t\bar{x} + t\bar{y}$$

$$= \bar{x} + t(\bar{y} - \bar{x}) = \bar{x} + \bar{t}(\overline{y-x}) = \overline{x + t(y-x)} = \bar{z}.$$

Aufgabe 85

a) „$\Rightarrow$" Es liegen x, y, z auf einer Geraden, also $z = x + t(y-x)$ für ein $t \in \mathbb{R}$.

Dann ist

$$\frac{\overline{x}-\overline{z}}{x-z} = \frac{\overline{x} - \overline{(x+t(y-x))}}{x-(x+t(y-x))} = \frac{\overline{x}-\overline{x}-t\overline{(y-x)}}{x-x-t(y-x)} = \frac{-t(\overline{y}-\overline{x})}{-t(y-x)} = \frac{\overline{y}-\overline{x}}{y-x} = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{x-y}$$

„$\Leftarrow$" Sei umgekehrt $\frac{\overline{x}-\overline{z}}{x-z} = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{x-y}$.

Definiere $a := x-z$, $b := x-y$. Dann ist wegen $\overline{x}-\overline{z} = \overline{x-z}$ und $\overline{x}-\overline{y} = \overline{x-y}$ der Bruch $\frac{\overline{x}-\overline{z}}{x-z} = \frac{\overline{x-z}}{x-z} = \frac{\overline{a}}{a}$ und analog $\frac{\overline{x}-\overline{y}}{x-y} = \frac{\overline{b}}{b}$.

Daraus folgt: $\frac{\overline{x}-\overline{z}}{x-z} = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{x-y} \Leftrightarrow \frac{\overline{a}}{a} = \frac{\overline{b}}{b} \Leftrightarrow \overline{a}b = \overline{b}a$.

Da aber $\overline{\overline{a}b} = \overline{\overline{a}} \cdot \overline{b} = a \cdot \overline{b} = \overline{b}a$ folgt, dass $\overline{a}b = \overline{\overline{a}b}$.

Somit $\overline{a}b \in \mathbb{R}$ und $\overline{b}a \in \mathbb{R}$.

Also $(\overline{x}-\overline{y})(x-z) = t \in \mathbb{R}$ für ein t aus $\mathbb{R}$.

$(\overline{x}-\overline{y})x - z(\overline{x}-\overline{y}) = t$

$$\Rightarrow z = \frac{x\overline{(x-y)} - t}{\overline{x-y}} = x - \frac{t}{\overline{x-y}}.$$

$$\frac{1}{\overline{(x-y)}} = \overline{(x-y)}^{-1} = \frac{\overline{\overline{(x-y)}}}{|x-y|^2} = \frac{x-y}{|x-y|^2}.$$

$$\Rightarrow z = x + \underbrace{\frac{-t}{|x-y|^2}}_{\lambda \in \mathbb{R}}(x-y).$$ Also liegt z auf der Geraden durch x und y.

b) Zwei Geraden in $\mathbb{C}$ sind orthogonal, wenn je zwei aufspannende Vektoren v auf $\mathcal{L}$ und w von $\mathcal{L}'$ ein um $90°$ gedrehtes Vielfaches voneinander sind.

D.h. $\quad v = i \cdot \lambda \cdot w$, wobei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Seien $y, z \in \mathcal{L}$ und $w, x \in \mathcal{L}'$.

„$\Rightarrow$" Seien $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ orthogonal zueinander, d.h. $(y-z) = i \cdot \lambda \cdot (w-x)$. Dann ist $(w-x) = \lambda^{-1} \cdot (-i) \cdot (y-z)$

Somit ist

$$\frac{\bar{w}-\bar{x}}{w-x} = \frac{\overline{w-x}}{w-x} = \frac{\overline{\lambda^{-1}(-i)(y-z)}}{\lambda^{-1}(-i)(y-z)} = \frac{\bar{y}-\bar{z}}{y-z} \cdot \frac{i}{-i} = -\frac{\bar{y}-\bar{z}}{y-z} = \frac{\bar{z}-\bar{y}}{y-z}$$

„$\Leftarrow$" Sei umgekehrt $\dfrac{\bar{w}-\bar{x}}{w-x} = \dfrac{\bar{z}-\bar{y}}{y-z}$. Definiere wie vorher

$a := w-x$, $b := z-y$

$$\Rightarrow \frac{\bar{a}}{a} = \frac{\bar{b}}{-b} \quad \Rightarrow \quad -\bar{a}b = \bar{b}a = \overline{\bar{a}b}.$$

$\overline{\bar{a}b} = -\bar{a}b$ bedeutet aber, dass $\bar{a}b$ rein imaginär ist,

also $\bar{a}b = \cancel{\ \ } it$ für ein $t \in \mathbb{R}$ ~~und $\bar{b}a$~~.

und $a\bar{b} = i\lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Also $(\overline{z-y})(w-x) = i\lambda$

$$\Rightarrow (w-x) = \frac{i\lambda}{(\overline{z-y})} = i\lambda \cdot \frac{(z-y)}{|z-y|^2} = i\,\frac{\lambda}{|z-y|^2}\,(z-y).$$

Somit sind $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ orthogonal zueinander.