Musterlösung Blatt 7

Aufgabe 79

a) z.z.: $\chi(n) = 0$ für $n \geq 2$.

Beweis: Sei $n \geq 2$ und p Primteiler von n. Dann ist $\chi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{\substack{d|n \\ \wedge p|d}} \mu(d) + \sum_{\substack{d|n \\ p\nmid d}} \mu(d)$

Die Teiler d von n für die $\mu(d) = 0$ ist können vernachlässigt werden.
Sei nun d Teiler von n mit $\mu(d) \neq 0$, d.h. alle Primfaktoren von d kommen höchstens ein mal vor.
Sei außerdem $p \nmid d$. Dann ist $\mu(d) = -\mu(p \cdot d)$, wobei $p \cdot d$ auch Teiler von n ist. Außerdem ist jede Teiler $d'|n$ mit $p|d'$ und $\mu(d') \neq 0$ von dieser Form. Also kann man jeweils d und $p \cdot d$ zusammensortieren und $\mu(d) + \mu(p \cdot d) = 0$.
Also ist $\chi(n) = 0$.

b) Die in ⊛ formulierte Bedingung

$d|n \wedge c|\frac{n}{d}$ ist äquivalent zu:

$d|n \wedge c|\frac{n}{d} \Leftrightarrow d|n \wedge c\cdot d|n \Leftrightarrow c\cdot d|n \Leftrightarrow c|n \wedge d|\frac{n}{c}$.

Dann steht in der Gleichung:

$$\prod_{d|n}(t^{\frac{n}{d}}-1)^{\mu(d)} \overset{Def.}{=} \prod_{d|n}\Big(\prod_{c|\frac{n}{d}} \phi_c(t)\Big)^{\mu(d)}$$

$$= \prod_{d|n}\prod_{c|\frac{n}{d}}\Big(\phi_c(t)^{\mu(d)}\Big) = \prod_{d|n \wedge c|\frac{n}{d}} \phi_c(t)^{\mu(d)}$$

$$= \prod_{c|n \wedge d|\frac{n}{c}} \phi_c(t)^{\mu(d)} = \prod_{c|n}\prod_{d|\frac{n}{c}} \phi_c(t)^{\mu(d)}$$

$$= \prod_{c|n} \phi_c(t)^{\sum_{d|\frac{n}{c}}\mu(d)} = \prod_{c|n} \phi_c(t)^{\sum_{c|n \wedge d|\frac{n}{c}}\mu(d)}$$

$$= \prod_{c|n} \phi_c(t)^{\chi(n/c)} \overset{a)}{=} \prod_{\substack{c|n \\ c\neq n}} \phi_c(t)^0 \cdot \prod_{\substack{c|n \\ c=n}} \phi_c(t)^{\chi(\frac{n}{c})}$$

$$= \phi_n(t)^{\chi(1)} = \phi_n(t)^1 = \phi_n(t)$$

c) Nach der Formel aus (b) gilt:

$$\phi_{10}(t) = \prod_{d|10} \left(t^{\frac{10}{d}} - 1\right)^{\mu(d)} \cancel{= (t^{10}-1)^{\mu(10)} (t^{5}-1)}$$

$$= (t^{10}-1)^{\mu(1)} \cdot (t^5-1)^{\mu(2)} \cdot (t^2-1)^{\mu(5)} \cdot (t-1)^{\mu(10)}$$

$$= (t^{10}-1)^{1} \cdot (t^5-1)^{-1} \cdot (t^2-1)^{-1} \cdot (t-1)^{1}$$

$$= (t^{10}-1)(t-1) : \left[(t^5-1)(t^2-1)\right]$$

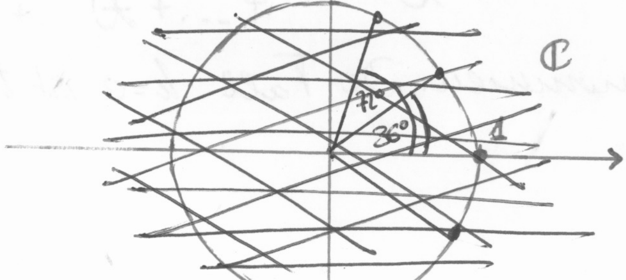
$$= (t^{11}-t^{10}-t+1) : (t^7-t^5-t^2+1) = t^4-t^3+t^2-t+1$$

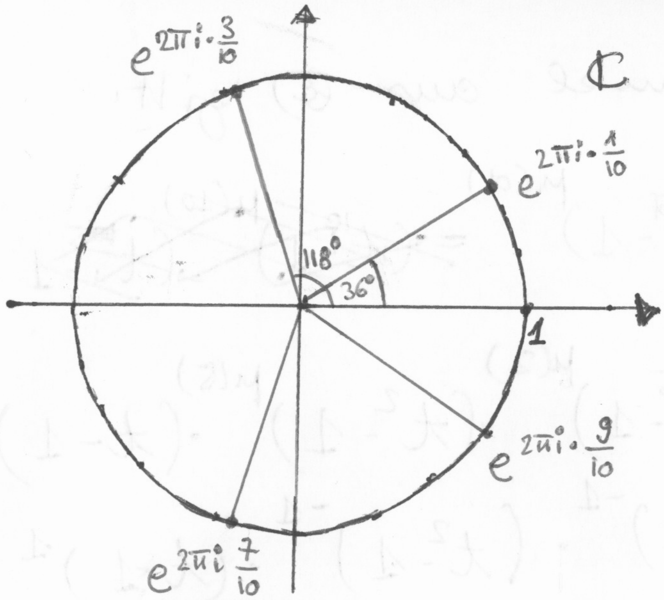
Polynomdivision:

$$(t^{11}-t^{10}-t+1) : (t^7-t^5-t^2+1) = t^4-t^3+t^2-t+1$$

$$\begin{array}{l}
\underline{t^{11} - t^9 - t^6 + t^4} \\
-t^{10} + t^9 + t^6 - t^4 - t + 1 \\
\underline{-t^{10} + t^8 + t^5 - t^3} \\
t^9 - t^8 + t^6 - t^5 - t^4 + t^3 - t + 1 \\
\underline{t^9 - t^7 - t^4 + t^2} \\
-t^8 + t^7 + t^6 - t^5 \cancel{\;} + t^3 - t^2 - t + 1 \\
\underline{-t^8 + t^6 + t^3 - t} \\
t^7 - t^5 - t^2 + 1 \\
\underline{t^7 - t^5 - t^2 + 1} \\
0
\end{array}$$

Die Nullstellen von $\phi_{10}(t)$ sind die Nullstellen von $(t^{10}-1)$ ohne die von $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ und $\phi_5(t)$





d) $t^{n-d} + t^{n-2d} + \dots + t^d + 1 \overset{d\cdot k = n}{=} t^{dk-d} + t^{dk-2d} + \dots + t^d + t^0$

$= t^{d(k-1)} + t^{d(k-2)} + \dots + t^d + t^0 = (t^d)^{k-1} + (t^d)^{k-2} + \dots + (t^d)^1 + (t^d)^0$

$= \sum_{i=0}^{k-1} (t^d)^i \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{(t^d)^{k-1+1} - 1}{t^d - 1} = \frac{t^{dk} - 1}{t - 1} = \frac{t^n - 1}{t^d - 1}.$

e) Zunächst berechne $\mu(p^l)$ für $l \in \mathbb{N}$.

$\mu(p^l) = \begin{cases} 1, & \text{für } l = 0 \\ -1, & \text{für } l = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$, $d \mid p^k \Rightarrow d = p^l$ mit $l \leq k$.

Also ist $\phi_{p^k}(t) = \prod_{d \mid p^k} (t^{\frac{p^k}{d}} - 1)^{\mu(d)} = \prod_{l=0}^{k} (t^{p^{(k-l)}} - 1)^{\mu(p^l)}$

$\overset{\mu(p^l)=0}{\underset{k \geq 1}{=}} \prod_{l=0}^{1} (t^{p^{(k-l)}} - 1)^{\mu(p^l)} = (t^{p^{(k-1)}} - 1)^{-1} \cdot (t^{p^k} - 1)^1$

$= \frac{t^{p^k} - 1}{t^{p^{(k-1)}} - 1} \overset{p^{k-1} \mid p^k + (d)}{=} t^{p^k - p^{k-1}} + t^{p^k - 2p^{k-1}} + \dots + t^{p^{k-1}} + 1$

$= t^{p^{k-1}(p-1)} + t^{p^{k-1}(p-2)} + \dots + t^{p^{k-1}} + 1.$

Es wurde $k \geq 1$ angenommen. Der Fall $k = 0$ ist trivial.

~~5~~) Aufgabe 80

a) ~~Z~~: Die Gleichung $a^2+b^2=5^k$ besitzt genau $4(k+1)$ Lösungen in den ganzen Zahlen.

Beweis: Zunächst gilt:

$$5^k = 5^{k-l}\cdot 5^l = (4-(-1))^{k-l}\cdot(4-(-1))^l = (2^2-i^2)^{k-l}\cdot(2^2-i^2)^l$$

$$= [(2+i)(2-i)]^{k-l}\cdot[(2+i)(2-i)]^l$$

$$= (2+i)^l(2-i)^{k-l}\cdot(2+i)^{k-l}(2-i)^l$$

Der linke Term $(2+i)^l(2-i)^{k-l}$ ergibt konjugiert den rechten Term.

$$\overline{(2+i)^l(2-i)^{k-l}} = \overline{(2+i)}^l\cdot\overline{(2-i)}^{k-l} = (2+i)^{k-l}\cdot(2-i)^l.$$

Somit ist, wenn man $(2+i)^l(2-i)^{k-l} = a+ib$ schreibt (a,b ~~können~~ müssen aus den ganzen Zahlen sein, da nur Klammern mit ganzen Real- und Imaginärteil ausmultipliziert werden und $l\leq k$),

$$5^k = (2+i)^l\cdot(2-i)^{k-l}\cdot(2-i)^l\cdot(2+i)^{k-l} = (a+ib)(a-ib) = a^2-i^2b^2$$
$$= a^2+b^2.$$

Somit löst $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ die Gleichung.

Wenn (a,b) eine Lösung ist, dann ~~is~~ sind auch die Tupel $(-a,b)$; $(a,-b)$; $(-a,-b)$; (b,a); $(-b,a)$; $(b,-a)$ und $(-b,-a)$ Lösungen, insgesamt also acht, falls sie alle verschieden sind. Es könnte passieren, dass $a=b$ oder $a=0$ oder $b=0$.

Der Fall $a=b$ kann nicht eintreten, da dann

$$a^2+b^2 = 2a^2 = 5^k \Rightarrow 2|5^k \Rightarrow 2|5 \text{ Widerspruch.}$$

Für $a\neq 0$ muss man bemerken, dass die komplexe Zahl $2+i$ einen irrationalen Winkel hat, d.h. keine Potenz $\neq 0$ von ihr ist reell.

Angenommen $(2+i)^l (2-i)^{k-l}$ ist rein imaginär, d.h.

$$(2+i)^l (2-i)^{k-l} = iz \quad \text{mit } z\in\mathbb{R}.$$

Dann ist

$$iz = (2+i)^l \cdot \overline{(2+i)}^{k-l} = (2+i)^l \left[(2+i)^{-1}\cdot |2+i|^2\right]^{k-l}$$
$$= (2+i)^l \cdot \left[(2+i)^{-1}\right]^{k-l} \cdot 5^{k-l}$$
$$= (2+i)^l \cdot (2+i)^{l-k} \cdot 5^{k-l} = (2+i)^{2l-k} \cdot 5^{k-l}$$

Dann ist

$$z^4 = (iz)^4 = \left[(2+i)^{2l-k} \cdot 5^{k-l}\right]^4 = (2+i)^{8l-4k} \cdot (5^{k-l})^4 \in\mathbb{R}$$

Dann muss aber $(2+i)^{4(2l-k)} \in\mathbb{R}$ sein, Widerspruch für $l\neq \frac{k}{2}$.

Rechnung für $b=0$ analog.

D.h. das Problem mit $b=0 \vee a=0$ tritt nur bei $l=\frac{k}{2}$ auf. Dort hat man nur vier Lösungen, sonst acht. Das heißt die Lösungen sind untereinander verschieden für festes l.

Wähle nun verschiedene $l, l' \in \{0, \dots \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$, wieso sind die Lösungen dann verschieden?

Sei $(2+i)^l \cdot (2-i)^{k-l} = a+ib$

$(2+i)^{l'} \cdot (2-i)^{k-l'} = c+id$

und sei $a+ib = c+id$

Dann ist $(2+i)^{l-l'} \cdot (2-i)^{k-l+l'-k} = 1$

$\Rightarrow (2+i)^{l-l'} \cdot (2-i)^{l'-l} = 1$

$\Rightarrow (2+i)^{l-l'} = (2-i)^{l-l'}$

$\Rightarrow \left(\frac{(2+i)}{(2-i)}\right)^{l-l'} = 1 \Rightarrow \left(\frac{(2+i)^2}{5}\right)^{l-l'} = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{4+4i-1}{5}\right)^{l-l'} = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)^{l-l'} = 1$

$\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ hat den ~~d~~ doppelten Winkel von $2+i$, somit auch irrational und es muss gelten: $l - l' = 0$, also $l = l'$.

Daher gibt es zwei Fälle:

<u>1. Fall</u> k gerade. Für $0 \leq l \leq \frac{k}{2} - 1$ gibt es acht Lösungen und $l = \frac{k}{2}$ vier, somit $8\frac{k}{2} + 4 = 4(k+1)$ Lösungen.

<u>2. Fall</u> k ungerade. Für jedes $0 \leq l \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ gibt es acht Lösungen. Es gibt ~~$\frac{k+1}{2}$~~ $\frac{k+1}{2}$ solcher l's, also $8 \frac{k+1}{2} = 4(k+1)$ Lösungen.

b) z.z.: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Kreis im $\mathbb{R}^2$ auf dem genau n ganzzahlige Punkte liegen.

1. Fall n ist gerade, also $n = 2k$. Der Kreis
$S(n) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (2x-1)^2 + (2y)^2 = 5^{k-1}\}$ kann höchstens $4((k-1)+1) = 4k$ ganzzahlige Tupel enthalten, denn jedes $(c,d) \in S(n)$ mit $c,d \in \mathbb{Z}$ gibt eine Lösung von $a^2+b^2 = 5^{k-1}$, nämlich $(2c-1, 2d)$.
Die Abbildung $(c,d) \mapsto (2c-1, 2d)$ ist injektiv.
Da in der Gleichung $a^2+b^2 = 5^{k-1}$ eine der Einträge a oder b gerade und der andere ungerade sein muss, lassen sich alle Lösungen ~~a~~ von $a^2+b^2=5^{k-1}$ in der Form $(2c-1, 2d)$ bzw. $(2c, 2d-1)$. Von jeder ~~So~~ der beiden Sorten gibt es $2k$ Lösungen, aber nur die $(2c-1, 2d)$ werden von der Abbildung $(c,d) \mapsto (2c-1, 2d)$ getroffen. ~~Die~~ Die andere Hälfte der Lösungen kann nur von unganzzahligen Tupeln getroffen werden.
D.h. es gibt eine Bijektion zwischen den ganzzahligen Punkten von $S(n)$ und den Lösungen der Form $(2c-1, 2d)$ von $a^2+b^2 = 5^{k-1}$, das sind genau $2k$, also n.

2. Fall: Sei nun n ungerade, $n = 2k+1$ und definiere $S(n) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (3x-1)^2 + (3y)^2 = 5^{2k}\}$.
Wie zuvor gibt es eine Bijektion zwischen den ganzzahligen Punkten auf $S(n)$ und den Lösungen von de Gleichung $a^2+b^2 = 5^{2k}$, welche die Form $(3c-1, 3d)$ haben.

~~Unterteile die Lösungen in die a $(3-c)$ bzw. 4 ex Gruppen wie in a)~~

Angenommen $a^2+b^2 = 5^{2k}$, dann gilt modulo 3 die Gleichung $a^2+b^2 \equiv 5^{(2k)}$ (mod 3)

Da $5^{2k} = (5^2)^k = 25^k \equiv 1^k = 1$ (mod 3) ist $a^2+b^2 \equiv 1$ (mod 3). Da weiter $a^2 \underset{(\text{mod } 3)}{\equiv} \begin{cases} 0, & \text{falls } a \equiv 0 \\ 1, & \text{sonst } \begin{smallmatrix} a \equiv 1 \\ a \equiv 2 \end{smallmatrix} \end{cases}$

muss genau einer der Einträge a oder b der Lösung der 3 teilbar sein. D.h. modulo 3 gibt es die vier Lösungstypen $(0,1); (0,2); (1,0); (2,0)$

Die Lösungen vom Typ $(0,1)$ sind offensichtlich bijektiv zu denen vom Typ $(1,0)$. Mit $(0,2)$ und $(2,0)$ geht es genauso.

Gesucht ist Bijektion zwischen den Lösungen vom Typ $(1,0)$ und $(2,0)$.

$\varphi: ((a,b)) = (-a,b)$ erfüllt das, ~~dann~~ denn $a \equiv 1$ (mod 3) $\Rightarrow -a \equiv 2$ (mod 3) und umgekehrt.

Alle $4(2k+1)$ Lösungen zerfallen also in vier gleich große Typen von Lösungen. Somit gibt es genau $2k+1$ Lösungen von jedem Typ.

Die Lösungen der Form $(3c-1, 3d)$ sind aber genau die Lösungen vom Typ $(2,0)$, da

$$3c-1 = 3(c+1)+2 \equiv 2 \mod 3$$
$$3d \equiv 0 \mod 3.$$

Somit hat $S(n)$ genau $2k+1 = n$ ganzzahlige Punkte.

c) Gute Übung für GeoGebra.

Aufgabe 81

Zu berechnen ist der Schnittpunkt von $[v,w] = \{tv+(1-t)w \mid t \in [0,1]\}$ mit der y-Achse, dabei sind v, w verschieden und liegen auf der Standardparabel.

$[v,w]$ ist das Liniensegment, welches v und w durch eine gerade Linie verbindet. Wenn v oder w der Ursprung ist, d.h. $v=(0,0)$ oder $w=(0,0)$ ist die Aussage klar. Wenn beide x-Koordinaten links oder beide rechts von der y-Achse liegen, dann gibt es offensichtlich keinen Schnittpunkt.

Da v, w auf der Parabel liegen gilt
$v = (a, a^2)$, $w = (b, b^2)$ für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$.

Gesucht ist ein Parameter $t \in [0,1]$ mit

$$\cancel{t \cdot \binom{a}{a^2} + (1-t)\binom{b}{b^2} = \binom{0}{z}}$$

$t \cdot (a, a^2) + (1-t)(b, b^2) = (0, z)$ also eine Lösung des LGS für beliebiges z.

$$\left| \begin{array}{l} a \cdot t + b(1-t) = 0 \\ a^2 t + b^2(1-t) = z \end{array} \right| \longrightarrow$$

Die erste Gleichung gibt
$b + t(a-b) = 0$
$\Rightarrow t = \frac{-b}{a-b}$

Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt sich für z:

$$z = a^2 \cdot \frac{-b}{a-b} + b^2\left(1 + \frac{b}{a-b}\right) = \frac{-ba^2}{a-b} + b^2\left(\frac{a-b}{a-b} + \frac{b}{a-b}\right) = \frac{-ba^2}{a-b} + \frac{ab^2}{a-b}$$
$$= ab \cdot \frac{b-a}{a-b} = -ab$$

Somit ist $\cancel{\left(0, a^2 \frac{-b}{a-b} + b^2\left(1 + \frac{b}{a-b}\right)\right)}$ der Schnittpunkt.
$(0, -ab)$

Der Parameter t liegt zwischen 0 und 1, denn wir haben angenommen, dass die Punkte auf verschiedenen Seiten der y-Achse liegen.

Sei also $a < 0 < b$, dann ist die Funktion
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto a \cdot t + b(1-t)$ stetig und
$f(0) = 0a + (1-0)b = b > 0$, $f(1) = a + 0b = a < 0$.
Somit gibt es Nullstelle zwischen 0 und 1.