Musterlösung Blatt 6

Aufgabe 71

a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen als $a+ib$ mit $a,b \in \mathbb{R}$.

1. $i^n \; (n \in \mathbb{Z})$

Stelle $n \in \mathbb{Z}$ dar als $4q+r$ mit $0 \leq r < 4$.
Dann ist

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r.$$

Also sind nur

i^0, i^1, i^2, i^3 zu berechnen.

$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i$

Insgesamt folgt also

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \equiv 0 \pmod 4 \\ i, & \text{falls } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1, & \text{falls } n \equiv 2 \pmod 4 \\ -i, & \text{falls } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

2. $\dfrac{1-i}{1+i}$:

Bei einem Bruch komplexer Zahlen $\frac{a+ib}{c+id}$ kann man immer mit dem komplex Konjugierten des Nenners erweitern, denn dann bleibt unten eine reelle Zahl stehen.

$\cancel{\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c}}$

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+i^2d^2} = \frac{ac-iad+ibc-i^2bd}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}.$$

Im konkreten ~~Fall~~ Fall folgt

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1^2-2i+i^2}{1^2-i^2} = -\frac{2i}{2} = -i$$

3. Strategie wie oben:

$$\frac{1+2i}{(2+3i)^2} = \frac{1+2i}{4+12i+9i^2} = \frac{1+2i}{-5+12i} = \frac{(1+2i)}{-5+12i} \cdot \frac{-5-12i}{-5-12i}$$

$$= \frac{-5-12i-10i+24}{25+144} = \frac{19-22i}{169} = \frac{19}{169} - \frac{22}{169}i$$

b) Das Gleichungssystem ist über $\mathbb{C}$ zu lösen, d.h. x und y dürfen komplexe Zahlen sein. Schreibe $x = a+bi$ und $y = c+di$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind. Dann wird aus dem komplexe System mit 2 Unbekannten ein reelles System mit 4 Unbekannten.

Einsetzen ergibt:

$$\left|\begin{array}{l} i(a+bi) - 3(c+di) = 1 \\ 2(a+bi) + i(c+di) = 2i \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot i \end{array} \sim \left|\begin{array}{l} 2i(a+bi) - 6(c+di) = 2 \\ 2i(a+bi) + i^2(c+di) = -2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I}-\mathrm{II} \\ \mathrm{I}+\mathrm{II} \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} -5(c+di) = 4 \\ 2i(a+bi) - (c+di) = -2 \end{array} \right| \rightsquigarrow \left| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} -5c = 4 \\ -5di = 0i \end{array}\right\} -5(c+di) = 4+0i \\ \\ 2i(a+bi) - (c+di) = -2 \end{array} \right| \begin{array}{l} :(-5) \\ :(-5i) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left| \begin{array}{l} c = -\frac{4}{5} \\ d = 0 \\ 2i(a+bi) - (-\frac{4}{5} + 0i) = -2 \end{array} \right| \rightsquigarrow 2ai - 2b + \frac{4}{5} = -2$$

$$\rightarrow 2ai - 2b = -\frac{14}{5} \rightarrow \begin{array}{l} 2ai = 0i \\ -2b = -\frac{14}{5} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 0 \\ b = \frac{14}{10} = 1{,}4. \end{array}$$

Insgesamt: $x = a+bi = 1{,}4i$

$y = c+di = -\frac{4}{5} = -0{,}8.$

<u>Aufgabe 72</u> Sei $f(X) = z_n X^n + \dots + z_1 X + z_0 \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten $z_n, \dots, z_0 \in \mathbb{C}$. Wir bezeichnen das komplex konjugierte Polynom von f mit

$$\bar{f}(X) = \bar{z}_n X^n + \dots + \bar{z}_1 X + \bar{z}_0.$$

a) Sei $z_n \in \mathbb{R}$ und habe f nur reelle Nullstellen, so ist $f = \bar{f}$.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt f in Linearfaktoren und den führenden Koeffizienten, also

$$f(X) = z_n (X - \lambda_n) \cdot (X - \lambda_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_1)$$

Da nach Voraussetzung alle λ_i in $\mathbb{R}$ liegen folgt, dass die Koeffizienten von $\frac{f(X)}{z_n}$ alle in $\mathbb{R}$ liegen, da sie Summe und Produkt von reellen Zahlen sind. Da $z_n \in \mathbb{R}$ angenommen wird sind auch die Koeffizienten von $f(X)$ in $\mathbb{R}$. Da für $z_i \in \mathbb{R}$ gilt $z_i = \overline{z_i}$ folgt $f(x) = z_n X^n + \dots + z_1 X + z_0 = \overline{z_n} X^n + \dots + \overline{z_1} X + \overline{z_0} = \overline{f}(X)$.

b) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f.

z.z.: Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so gilt auch $\overline{f}(\alpha) = 0$.

$$\overline{f}(\alpha) = \overline{z_n}\alpha^n + \dots + \overline{z_1}\alpha + \overline{z_0} \overset{\alpha \in \mathbb{R}}{=} \overline{z_n}\,\overline{\alpha}^n + \dots + \overline{z_1}\,\overline{\alpha} + \overline{z_0}$$
$$= \overline{z_n \alpha^n} + \dots + \overline{z_1 \alpha} + \overline{z_0} = \overline{z_n\alpha^n + \dots + z_1\alpha + z_0}$$
$$= \overline{f(\alpha)} = \overline{0} = 0.$$

z.z.: Seien die Koeffizienten in $\mathbb{R}$, so ist $f(\overline{\alpha}) = 0$.

$$f(\overline{\alpha}) = z_n \overline{\alpha}^n + \dots + z_1\overline{\alpha} + z_0 = z_n \overline{\alpha^n} + \dots + z_1\overline{\alpha} + z_0$$
$$= \overline{z_n} \cdot \overline{\alpha^n} + \dots + \overline{z_1}\,\overline{\alpha} + \overline{z_0} = \overline{z_n\alpha^n + \dots + z_1\alpha + z_0}$$
$$= \overline{f(\alpha)} = \overline{0} = 0$$

Hier wird an mehreren Stellen benutzt, dass für komplexe Zahlen $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$, oder mit anderen Worten, dass

$\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

$$\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\quad x \mapsto \overline{x}$$ ein Ringhomomorphismus ist.

c) Sei $\overline{f} \neq \pm f$. Zeigen Sie, dass $f(X) \cdot X^{n+1} + \overline{f}(X)$ höchstens n reelle Nullstellen hat.
Geben Sie für jedes n ein Beispiel an, das genau n Nullstellen hat.

Da $f(X) = z_n X^n + \dots + z_1 X + z_0 = (a_n + i b_n) X^n + \dots + (a_1 + i b_1) X + (a_0 + i b_0)$

$$= (a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0) + i(b_n X^n + \dots + b_1 X^1 + b_0)$$

$$= g(X) + i h(X),$$

wobei $g(X)$ und $h(X)$ ausschließlich reelle Koeffizienten haben.

Es gilt $\overline{f}(X) = g(X) - i h(X)$.

Somit ist $\overline{f}(X) \neq f(X) \Leftrightarrow h(X) \neq 0$

$\overline{f}(X) \neq -f(X) \Leftrightarrow g(X) \neq 0$.

Also $h(X) \neq 0 \wedge g(X) \neq 0$.

Sei nun $f(X) X^{n+1} + \overline{f}(X) = 0$

$$\Rightarrow 0 = (g(X) + i h(X)) X^{n+1} + g(X) - i h(X)$$

$$= g(X) X^{n+1} + g(X) + i(h(X) X^{n+1} - h(X))$$

$$= g(X)(X^{n+1} + 1) + i\, h(X)(X^{n+1} - 1)$$

Wenn nun $x \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle sein muss, dann muss $g(x)(x^{n+1} + 1) = 0$ und $h(x)(x^{n+1} - 1) = 0$ gelten, also ist $(g(x) = 0 \vee x^{n+1} + 1 = 0) \wedge (h(x) = 0 \vee x^{n+1} - 1 = 0)$

$$\Leftrightarrow (g(x) = 0 \wedge h(x) = 0) \vee (x^{n+1} + 1 = 0 \wedge h(x) = 0) \vee (g(x) = 0 \wedge x^{n+1} - 1 = 0)$$
$$\vee\, (x^{n+1} + 1 = 0 \wedge x^{n+1} - 1 = 0)$$

Der vierte Fall kann nicht eintreten, da sonst $2=0$.
Somit

$$\Rightarrow (g(x)=0 \wedge h(X)=0) \vee (x^{n+1}+1=0 \wedge h(X)=0) \vee (x^{n+1}-1=0 \wedge g(X)=0)$$

$$t(X) := f(X)X^{n+1} + \bar{f}(X).$$

Sei x eine reelle Nullstelle von t,
so ist x eine Nullstelle ~~von~~ g oder eine NST von h, wie man aus der obigen Aussage durch Fallunterscheidung sehen kann.
Seien N_t, N_g, N_h die reellen NST-Mengen von t, g und h.
Dann gilt also

$$N_t \subseteq N_g \cup N_h$$

Wir möchten die Mächtigkeit von $N_g \cup N_h$ abschätzen.

$$N_g \cup N_h = \underbrace{(N_g \cap N_h) \cup (N_g \setminus N_h)}_{N_g} \cup (N_h \setminus N_g)$$
$$= N_g \cup (N_h \setminus N_g)$$

Nach dem Fundamentalsatz* hat N_g höchstens n Elemente, da $g \neq 0$.
Sei $x \in N_h \setminus N_g$, dann muss wegen der Aussage oben $x^{n+1}+1=0$ gelten. Das Polynom $X^{n+1}+1$ hat aber ~~für~~ höchstens -1 als reelle Nullstelle und zwar genau dann, wenn n gerade ist.
Somit ~~ist~~ hat $t(X)$ höchstens $n+1$ Nullstellen für gerade n und höchstens n, wenn n ungerade ist.

Für ungerade n definiere $g(X) = h(X) = (X-1)(X-2)\dots(X-n)$.

$f(X) = g(X) + ih(X)$, $t(X) = f(X)X^{n+1} + \overline{f}(X)$.

Sei $k \in \{1, \dots n\}$.

$$t(k) = f(k)k^{n+1} + \overline{f}(k) = (g(k)+ih(k))k^{n+1} + (g(k) - ih(k))$$
$$\overset{g(k)=h(k)=0}{=} (0+i0)k^{n+1} + (0-i0) = 0$$

Somit hat t genau n reelle Nullstellen.

Sei n gerade, definiere
$$h(X) := (X+1)\cdot(X-2)\cdot\ldots\cdot(X-n)$$
$$g(X) := (X-1)\cdot(X-2)\cdot\ldots\cdot(X-n)$$

Behauptung: $-1, 1, 2, \dots n$ sind Nullstellen von $t(X)$.

Sei $k \in \{2, \dots n\}$, so ist die Rechnung analog wie oben.

$$t(+1) = f(1)1^{n+1} + \overline{f}(1) = (g(1) + ih(1)) + g(1) - ih(1)$$
$$\overset{g(1)=0}{=} i(h(1) - h(1)) = 0$$
$$t(-1) = f(-1)(-1)^{n+1} + \overline{f}(-1) = (g(-1) + ih(-1))(-1)^{n+1} + g(-1) - ih(-1)$$
$$\overset{h(-1)=0}{=} g(-1)(-1)^{n+1} + g(-1) \overset{n \text{ gerade}}{=} -g(-1) + g(-1) = 0$$

Somit gibt es genau $n+1$ reelle Nullstellen des Polynoms $t(X) = f(X)X^{n+1} + \overline{f}(X)$.

Aufgabe 73 Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}$$

Beweis durch Induktion:

$n=1$: $1+\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{\sqrt{k}} = 1+\frac{1}{\sqrt{1}} = 1+1 = 2 \leq 2\sqrt{1}$

Sei die Aussage für jedes aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ beweisen.

$n \mapsto n+1$

$$1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{IV}{\leq} 2\sqrt{n} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{k}}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

z.z.: $2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}$.

Durch Äquivalenzumformung.

$$2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+1 \leq 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+1} = 2n+2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \leq 2n+1 \overset{*}{\Leftrightarrow} 4n(n+1) \leq (2n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4n^2+4n \leq 4n^2+4n+1 \Leftrightarrow 0 \leq 1.$$

* Ist eine Äquivalenzumformung, weil beide Seiten der Gleichung größergleich 0 sind!

Somit $1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n+1}$.

Das zeigt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 74 a) Seien $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Das geom. Mittel ist durch das arithmetische Mittel beschränkt:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

Zeigen Sie dies für $n=2$. Wann gilt Gleichheit?

Beweis durch Äquivalenzumformung:

$$\sqrt[2]{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1+x_2}{2} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 \leq \frac{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x_1x_2 \leq x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x_1 - x_2)^2$$

Die letzte Aussage ist wahr, da das Quadrat einer reellen Zahl nie negativ ist.

Das erneute Ausführen dieser Umformungen mit einem „=" an Stelle von „≤" ergibt, dass

$$\sqrt{x_1 x_2} = \frac{x_1+x_2}{2} \Leftrightarrow 0 = (x_1 - x_2)^2$$

Das bedeutet aber gerade, dass $x_1 = x_2$ gelten muss.

b) Verifikation einiger Beispiele:

- $\sqrt[3]{3 \cdot 6 \cdot 12} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2^3} = 6 \leq 7 = \frac{21}{3} = \frac{3+6+12}{3}$
- $\sqrt[2]{\frac{14}{3} \cdot \frac{7}{6}} = \sqrt[2]{\frac{7^2}{3^2}} = \frac{7}{3} = \frac{28}{12} \leq \frac{35}{12} = \frac{\frac{35}{6}}{2} = \frac{\frac{14}{3} + \frac{7}{6}}{2}$
- $\sqrt[4]{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{8}{5}} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \leq \sqrt{\frac{1089}{400}} = \sqrt{\frac{33^2}{20^2}} = \frac{33}{20} = \frac{\frac{66}{10}}{4} = \frac{\frac{1}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \frac{8}{5}}{4}$.

Musterlösung Wiederholungsaufgaben

Aufgabe 75

Es stellt sich zunächst die Frage ob $0 \in \mathbb{N}$ liegt und wie 0^0 definiert ist.
Falls $0 \in \mathbb{N}$ angenommen wird kommt 0^0 in der Gleichung vor.
Normalerweise wird $0^0 = 1$ definiert.
In diesem Fall ist 0 und 1 austauschbar, da $0^0 = 1^1 = 1$ gilt.
Eine andere Definition ist aus verschiedenen (meist analytischen) Gründen nicht sinnvoll $\lightning$.

Es genügt also die Lösungen ohne Nullen zu finden, da man die mit Nullen daraus konstruieren kann.

<u>Beh:</u> Es gibt keine Lösung der Gleichung $a^a + b^b = c^c$ mit positiven ganzen Zahlen.

<u>Beweis</u> Sei o.B.d.A. $a \leq b$, dann ist
$b^b < a^a + b^b \leq 2b^b$. Da $c^c = a^a + b^b$ gelten soll ist $b^b < c^c$, woraus $b < c$ folgt. Da $b, c \in \mathbb{N}$ folgt $b+1 \leq c$. Also
$(b+1)^{(b+1)} \leq c^c$.
Da $2b^b \leq (b+1)\, b^b < (b+1)(b+1)^b = (b+1)^{b+1} \leq c^c$
Da aber $c^c = a^a + b^b \leq 2b^b < c^c$ ist das Widerspruch. $\rightsquigarrow$ keine Lösung

Aufgabe 76

a) Bestimmen Sie die Endziffer von 3^{1234}.

$3^0 \equiv 1 \mod 10$

$3^1 \equiv 3 \mod 10$

$3^2 \equiv 9 \mod 10$

$3^3 \equiv 7 \mod 10$

$3^4 \equiv 1 \mod 10$

$3^5 \equiv 3 \mod 10$

Die Reste der 3er Potenzen verhalten sich modulo 10 zyklisch mit Periode 4, d.h. $3^n \equiv 3^{n+4} \mod 10$ oder anders, ist $n \equiv m \mod 4$, so ist $3^n \equiv 3^m \mod 10$.

Schreibe $1234 = 4 \cdot 308 + 2$, also $1234 \equiv 2 \mod 4$.
Nach der vorherigen Überlegung ist

$$3^{1234} \equiv 3^2 = 9 \mod 10.$$

Die Endziffer ist also „9".

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, dann ist

$$(x+1)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}x^k = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}x^k$$

$$= (-1)^{(n-1)+1}x^{(n-1)+1} + \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{k+1}x^{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}x^k + (-x^0)$$

$$\overset{⊛}{=} (-1)^n x^n - 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k x^k + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}x^k$$

$$= x^n - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} x^k\left((-1)^k - (-1)^k\right) = x^n - 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x^k \cdot 0) = x^n - 1$$

⊛ In der ersten Summe wurde von 1 bis n-1 summiert anstatt von 0 bis n-2. Dafür wurde im Inneren der Summe k+1 durch k ersetzt, also bleibt alles gleich.

c) Bestimmen Sie die vorletzte Ziffer von 3^{1234}.

Wir wollen den Rest von 3^{1234} modulo 100 berechnen, um dort die vorletzte Ziffer abzulesen. Wir suchen erneut einen Zykel in der Multiplikationstabelle:

$3^0 \equiv 1 \mod 100$
$3^1 \equiv 3 \mod 100$
$3^2 \equiv 9 \mod 100$
$3^3 \equiv 27 \mod 100$
$3^4 \equiv 81 \mod 100$
$3^5 \equiv 43 \mod 100$
$3^6 \equiv 29 \mod 100$
$3^7 \equiv 87 \mod 100$
$3^8 \equiv 61 \mod 100$
$3^9 \equiv 83 \mod 100$
$3^{10} \equiv 49 \mod 100$

$3^{11} \equiv 47 \mod 100$
$3^{12} \equiv 43 \mod 100$
$3^{13} \equiv 23 \mod 100$
$3^{14} \equiv 69 \mod 100$ *
$3^{15} \equiv 7 \mod 100$
$3^{16} \equiv 21 \mod 100$
$3^{17} \equiv 63 \mod 100$
$3^{18} \equiv 89 \mod 100$
$3^{19} \equiv 67 \mod 100$
$3^{20} \equiv 01 \mod 100$

Die Multiplikation hat periode 20, somit $n \equiv m \mod 20$

$\Rightarrow 3^m \equiv 3^n \mod 100$. * s.o.

Schreibe $1234 = 20 \cdot 61 + 14$, also $1234 \equiv 14 \mod 20$.

$\Rightarrow 3^{1234} \equiv 3^{14} \equiv 69 \mod 100$.

Somit ist die vorletzte Ziffer eine „6".

<u>Anmerkung</u>: Die Reste der 3er Potenzen liegen in $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$. Da $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ nur 100 Elemente hat, muss spätestens nach dem 101 mal eine Wiederholung auftauchen. Da 101 Multiplikationen wesentl. weniger sind als 1234 ist das immer eine bessere Strategie, als stumpfes ausrechnen.

Hier eine alternative Lösung mit deutlich weniger Rechenaufwand.

Nach Aufgabe 58 (b) ist $3^{1234} \equiv 3^2 \equiv 4 \bmod 5$, also ist die Endziffer 4 oder 9. Aber 3^{1234} ist ungerade, also ist sie 9.
Das bedeutet, dass $3^{1234} - 9$ durch 10 teilbar ist. Die vorletzte Ziffer von 3^{1234} ist dann die Endziffer der Zahl

$$\frac{3^{1234} - 9}{10} = \frac{9^{617} - 9}{9 + 1} = 9 \cdot \frac{9^{616} - 1}{9 + 1} = 9 \cdot \sum_{k=0}^{615} (-1)^{k+1} 9^k.$$

Die letzte Gleichheit gilt nach (b). Modulo 10 erhalten wir die gesuchte Ziffer:

$$9 \cdot \sum_{k=0}^{615} (-1)^{k+1} 9^k \equiv -\sum_{k=0}^{615} (-1)^{k+1} (-1)^k = -\sum_{k=0}^{615} (-1) = 616 \equiv 6 \bmod 10.$$

Aufgabe 77: Sei K ein Körper, sowie $a, b, c \in K$ mit $a \neq 0$. Sei x eine Nullstelle des Polynoms $aX^4 + bX^3 + cX^2 + bX + a$.

a) z.z.: $X + \frac{1}{X}$ ist NST eines Quadratischen Polynoms mit Koeffizienten in K.

~~Z.z.~~

Beweis: Betrachte das Polynom $aY^2 + bY + (c-2a) = p(Y)$

$$p(X+\tfrac{1}{X}) = a\left(X+\tfrac{1}{X}\right)^2 + b(X+\tfrac{1}{X}) + (c-2a)$$
$$= a(X^2 + 2X\cdot\tfrac{1}{X} + \tfrac{1}{X^2}) + b(X+\tfrac{1}{X}) + c - 2a$$
$$= ax^2 + 2a + a\cdot\tfrac{1}{X^2} + bx + b\cdot\tfrac{1}{X} + c - 2a$$
$$= ax^2 + bx + c + b\cdot\tfrac{1}{X} + a\cdot\tfrac{1}{X^2}$$

$$\Rightarrow x^2\cdot p(x+\tfrac{1}{x}) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$

da x nach Voraussetzung Nullstelle ist.
Da $a \neq 0$ kann x nicht 0 sein.
Multipliziert man auf beiden Seiten mit x^{-2} erhält man

$p(x+\frac{1}{x}) = 0$. $p(Y)$ ist quadratisch in Y und hat Koeffizienten in K.

Wie findet man das Polynom?
Nach Voraussetzung ist

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

man möchte Variablen der Form $x + \frac{1}{x}$ gewinnen und teilt beide Seiten durch x^{+2}. $(\neq 0)$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c + b\cdot\frac{1}{x} + a\cdot\frac{1}{x^2} = a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Würde dort stehen: $a(x+\frac{1}{x})^2+b(x+\frac{1}{x})+c=0$,
dann wäre ay^2+by+c das gesuchte Polynom.
Leider ist $x^2+\frac{1}{x^2} \neq (x+\frac{1}{x})^2 = x^2+2+\frac{1}{x^2}$.

Allerdings unterscheiden sich die beiden Ausdrücke nur um den absoluten Term „2".
Zusammen mit dem Vorfaktor a können wir diesen Fehlerterm im absoluten Term unterbringen wie folgt:

$$0 = a(x^2+\frac{1}{x^2})+b(x+\frac{1}{x})+c = a(x^2+\frac{1}{x^2})+2a-2a+b(x+\frac{1}{x})+c$$
$$= a(x^2+2+\frac{1}{x^2})+b(x+\frac{1}{x})+c-2a$$
$$= a(x+\frac{1}{x})^2+b(x+\frac{1}{x})+c-2a$$

$\Rightarrow$ $x+\frac{1}{x}$ ist NST von $ay^2+by+(c-2a)$.

Die Verifikation ist leicht, da das Polynom genau so konstruiert wurde, dass es passt.

b) Aus der vorherigen Aufgabe geht ~~vorher~~ hervor, dass x genau dann NST von $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$ ist, wenn $x+\frac{1}{x}$ NST von $ay^2+by+(c-2a)$ ist.

Im konkreten Fall heißt das, dass $x+\frac{1}{x}$ NST von $y^2-3y+(\frac{1}{4}-2)$. ~~ist also~~
$= y^2-3y-\frac{7}{4}$ ist. Mit p-q-Formel und quadratische Ergänzung erhält man, dass
$y=-\frac{1}{2} \vee y=\frac{7}{2}$ gelten muss.

Sei also x eine NST von $aX^4+bX^3+cX^2+bX+a$, dann muss $x+\frac{1}{x}$ eine NST von $ay^2+by+c-2a$ sein, was bedeutet, dass $x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}$ oder $x+\frac{1}{x}=\frac{7}{2}$ gelten muss.

Die Rechnung: Sei $x>0$

$$x+\frac{1}{x}\geq 2 \Leftrightarrow x^2-2x+1\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$$

und sei $x<0$

$$x+\frac{1}{x} = -(-x)+-\left(\frac{1}{-x}\right) = -\left(-x+\frac{1}{-x}\right)\leq -2, \text{ da } -x>0$$

zeigt, dass $|x+\frac{1}{x}|\geq 2$ ist für alle $x\in\mathbb{R}$.

Somit hat $x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}$ keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Die Gleichung $x+\frac{1}{x}=\frac{7}{2}$ ist äquivalent zu

$$x+\frac{1}{x}-\frac{7}{2}=0 \Rightarrow x^2-\frac{7}{2}x+1=0 \Rightarrow \left(x-\frac{7}{4}\right)^2-\frac{49}{16}+\frac{16}{16}=0$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{33}{16}$$

$$\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{33}}{4}$$

Da $\sqrt{33}\notin\mathbb{Q}$, liegt auch x nicht in $\mathbb{Q}$.

$\underline{\sqrt{33}\notin\mathbb{Q}}$: $\sqrt{33}$ ist Nullstelle des Polynoms X^2-33, wäre $\sqrt{33}$ rational, so wäre es eine rationale Nullstelle, die, da das Polynom normiert ist ~~be~~ und nur ganzzahlige Koeffizienten hat schon in $\mathbb{Z}$ liegen. Da $25=5^2<33<36=6^6$ müsste es dann eine ganze Zahl zwischen 5 und 6 bzw. -5 und -6 geben. Widerspruch!

Aufgabe 78 Es sei $\mathbb{R}[t]$ der Polynomring in einer Unbestimmten mit reellen Koeffizienten. Wir bezeichnen mit

$$\delta: \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t],\ f \mapsto f'$$

die Ableitungsfunktion und definieren

$$\gamma: \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t],\ f \mapsto t \cdot f'.$$

a) Handelt es sich bei δ bzw. γ um Ringhomomorphismen

δ ist kein Ringhomomorphismus, da $\delta(1) \neq 1$, wobei mit „1" das konstante 1-Polynom gemeint ist, welches das multiplikativ neutrale Element darstellt.

γ ist auch kein Ringhomomorphismus,
~~denn~~ $\cancel{\gamma(t) = t \cdot (t)' = t \cdot 1 = t}$ ~~und~~ $\cancel{\gamma(}$
$\gamma(1) = t \cdot 1' = t \cdot 0 = 0$, aber $0 \neq 1$ und $\mathbb{R}[t]$.

b) ~~Sei~~ $\cancel{g, h \in \mathbb{R}[t]}$ ~~mit~~

Zeigen Sie, dass jede Äquivalenzklasse bezüglich der Relation $f \sim g \Leftrightarrow t^n \mid f-g$ genau ein Polynom vom Grad $< n$ enthält.

Eindeutigkeit:
Seien g, h zwei Polynome mit Grad $< n$ und $g \sim h$, dann gilt $t^n \mid g-h$. Da sowohl in g als auch in h alle Koeffizienten spätestens ab n gleich 0 sind hat auch $g-h$ Grad $< n$. Wäre einer der Koeffizient von $g-h$ nicht 0, so könnte t^n nicht $g-h$ teilen.
D.h. $g-h=0$ und daher $g=h$.

Existenz:

Sei $f = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$, definiere $g := \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k$.

g hat Grad $< n$ und

$$f - g = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k = \sum_{k=n}^{m} a_k t^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k$$

$$= \sum_{k=n}^{m} a_k t^k = t^n \underbrace{\sum_{k=n}^{m} a_k t^{k-n}}_{:= h}$$

Da $k \geq n$ ist h ein Polynom.
Somit ex. ein Polynom (h) mit $t^n \cdot h = f - g$, das ist gerade die Definition von $t^n \mid f-g$.
Also $f \sim g$ und daher $g \in f + (t^n)$.

c) Untersuchen Sie die induzierten Abbildungen

$\overline{\delta}: R[t]/(t^n) \to R[t]/(t^n)$, $f + (t^n) \mapsto \delta(f) + (t^n)$

$\overline{\rho}: R[t]/(t^n) \to R[t]/(t^n)$, $f + (t^n) \mapsto \rho(f) + (t^n)$

auf Wohldefiniertheit.

Zuerst $\overline{\delta}$. Sei $f + (t^n) = g + (t^n)$, dann ist $f \sim g$, also $t^n \mid f-g$. Somit ex. Polynom p mit $p \cdot t^n = f - g$.

Dann ist $\delta(f) - \delta(g) = f' - g' = (f-g)' = (p t^n)'$
$= p' t^n + n t^{n-1} p$. Dieser Term ist nicht durch p teilbar, falls p konstant und $\neq 0$ ist.

Beispiel: $t^n \sim 0$, aber $(t^n)' = n t^{n-1} \not\sim 0' = 0$.

Nun $\bar{\gamma}$: Sei $f+(t^n) = g+(t^n)$, dann ist $f \sim g$, also $t^n \mid f-g$ also $pt^n = f-g$ für ein Polynom $p \in \mathbb{R}[t]$.

$$\begin{aligned}
\gamma(f) - \gamma(g) &= tf' - tg' = t(f'-g') = t(f-g)' \\
&= t(pt^n)' = t(pnt^{n-1} + p't^n) \\
&= t^n(\underbrace{pn + p't}). \\
&= t^n h
\end{aligned}$$

Somit $t^n \mid \gamma(f) - \gamma(g) \Rightarrow \gamma(f) \sim \gamma(g)$

$\Rightarrow \gamma(f) + (t^n) = \gamma(g) + (t^n)$

d) Sei $\alpha = at + b + (t^2)$, $f \in \mathbb{R}[X]$ also $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

Dann ist $f(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (at+b+(t^2))^k$

$= \sum_{k=0}^{n} a_k ((at+b)^k + (t^2))$

Benutze den binomischen Lehrsatz $\cancel{(at+b)^k =}$

$(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k}$, der in jedem kommut. Ring mit 1 gilt, also

$(at+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (at)^i b^{k-i}$, ab $i \geq 2$ enthält jeder Summand einen Faktor t^2. Somit fallen diese Summanden ab $i \geq 2$ weg modulo (t^2).

Sei also $k \geq 1$, dann ist

$$(at+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (at)^i b^{k-i} \underset{(t^2)}{\equiv} \sum_{i=0}^{1} \binom{k}{i} (at)^i b^{k-i} = kb^{k-1}at + b^k$$

Für $k=0$ ist $(at+b)^k = (at+b)^0 = 1$.

Setzt man das in die obige Gleichung ein erhält man:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k((at+b)^k + (t^2)) = \sum_{k=1}^{n} a_k((at+b)^k + (t^2)) + a_0(1 + (t^2))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k\left(\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}(at)^i b^{k-i}\right) + (t^2)\right) + (a_0 + (t^2))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k((kb^{k-1}at + b^k) + (t^2)) + (a_0 + (t^2))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k((kb^{k-1}at) + (t^2)) + \sum_{k=1}^{n} a_k(b^k + (t^2)) + (a_0 b^0 + (t^2))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} at\, a_k(kb^{k-1} + (t^2)) + \sum_{k=0}^{n} a_k(b^k + (t^2))$$

$$= at(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k(kb^{k-1})}_{f'(b)} + (t^2)) + (\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k(b^k)}_{f(b)} + (t^2))$$

$$= at(f'(b) + (t^2)) + (f(b) + (t^2))$$

$$= ((f(b) + at f'(b)) + (t^2))$$

e) Bestimmen Sie die Einheitengruppe von $\mathbb{R}[t]/(t^2)$

Beh: $(a_0 + a_1 t + (t^2)) \in \left(\mathbb{R}[t]/(t^2)\right)^\times \Leftrightarrow a_0 \in \mathbb{R}^\times \Leftrightarrow a_0 \neq 0.$

„$\Rightarrow$" Sei $(a_0 + a_1 t + (t^2)) \in \left(\mathbb{R}[t]/(t^2)\right)^\times$, also

$$(a_0 + a_1 t + (t^2)) \cdot (b_0 + b_1 t + (t^2)) = (1 + (t^2))$$

$$\Rightarrow ((a_0 + a_1 t)(b_0 + b_1 t) + (t^2)) = ((a_0 b_0 + a_1 b_0 t + a_0 b_1 t + a_1 b_1 t^2 + (t^2))$$
$$= (1 + (t^2))$$

$$\Rightarrow ((a_0 b_0 + a_1 b_0 t + a_0 b_1 t) + (t^2)) = (1 + (t^2))$$

$$\Rightarrow ((a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) t) + (t^2)) = (1 + (t^2))$$

$$\Rightarrow a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) t \sim 1$$

$$\Rightarrow a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) t = 1$$

$$\Rightarrow a_0 b_0 = 1 \wedge a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0$$

$$\Rightarrow a_0 b_0 = 1 \Rightarrow a_0 \in \mathbb{R}^\times \Rightarrow a_0 \neq 0.$$

„$\Leftarrow$" Sei $a_0 \neq 0$, definiere $b_0 := a_0^{-1}$ und $b_1 = -\frac{a_1 a_0^{-1}}{a_0} = -\frac{a_1}{a_0^2}$.

Dann ist $(1 + (t^2)) = ((1 + 0t + (t^2)) = ((a_0 a_0^{-1} + (\underbrace{a_1 a_0^{-1} + (-a_0 \cdot \frac{a_1}{a_0^2})}_{=0}))t + (t^2))$

$= ((a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) t + (t^2)) = ((a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) t + a_1 b_1 t^2 + (t^2))$

$= ((a_0 + a_1 t) \cancel{+(t^2)} (b_0 + b_1 t) + (t^2)) = ((a_0 + a_1 t) + (t^2))((b_0 + b_1 t + (t^2))$

Also ist $(a_0 + a_1 t + (t^2)) \in \left(\mathbb{R}[t]/(t^2)\right)^\times$

f) Geben Sie ein Beispiel eines nicht-konstanten invertierbaren Polynoms an.

Der im Hinweis beschriebene Polynomring $\frac{\mathbb{R}[t]}{(t^2)}[X]$ besteht aus Polynomen, deren Koeffizienten in $\frac{\mathbb{R}[t]}{(t^2)}$ liegen.

Das Polynom darf nicht konstant sein, damit ~~sich~~ der führende Koeffizient wegfällt muss er ein Nullteiler sein, d.h. es ex. ein anderes Element x geben, sodass $x \cdot y = 0$, aber $x \neq 0$.

Betrachte $(1+(t^2)) + (t+(t^2))X$.

$$\left((1+(t^2))+(t+(t^2))X\right)\cdot\left((1+(t^2)) - (t+(t^2))X\right)$$

$$= \left((1^2+(t^2)\right) + \underbrace{(t+(t^2))X-(t+(t^2))X}_{=0} + (\underbrace{t^2+(t^2)}_{=0})X$$

$$= (1+(t^2)) = 1$$

D.h. $(1+(t^2))+(t+(t^2))X$ ist nicht-konstant und invertierbar.