Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke | Lösung 5

Aufgabe 67 (3+2+4 Punkte). Sei $\mathcal{P}$ ein Polygon im $\mathbb{R}^2$ mit Eckpunkten

$$(r_0, d_0) = (0, 0), (r_1, d_1), \ldots, (r_n, d_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R},$$

dessen Anstiege eine absteigende Kette rationaler Zahlen $\lambda_1 > \ldots > \lambda_n$ bilden.

(a) Sei $n = 4$, sowie $(r_1, \ldots, r_4) = (1, 3, 5, 7)$ und $(d_1, \ldots, d_4) = (1, 2, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$. Berechnen Sie $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ und malen Sie ein Bild von $\mathcal{P}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Eckpunkte von $\mathcal{P}$ rational sind, indem Sie berechnen:

$$d_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot (r_i - r_{i-1}).$$

(c) Bilden die Zahlen $\frac{d_1}{r_1}, \ldots, \frac{d_n}{r_n} \in \mathbb{Q}$ ebenfalls eine absteigende Kette? Was ist ihre geometrische Bedeutung? Tragen Sie sie in Ihr Bild aus (a) ein.

Lösung.

(a) Die Anstiege sind durch $\lambda_i = \frac{d_i - d_{i-1}}{r_i - r_{i-1}}$ gegeben. Also ist $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{4}$ und $\lambda_4 = -2$.

Für ein ähnliches Bild siehe hier (stellen Sie es sich auf dem Kopf vor).

(b) Mit der Formel für λ_i aus Teil (a) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot (r_i - r_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{d_i - d_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} \cdot (r_i - r_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (d_i - d_{i-1}) \\
&= d_k - d_0 \\
&= d_k.
\end{aligned}$$

Da nach Annahme $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ und $r_i \in \mathbb{N}$ für alle i gilt, ist die linke Seite der Gleichung rational und es folgt $(r_k, d_k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$ für alle $k = 1, \ldots, n$.

(c) Die Brüche $\frac{d_k}{r_k}$ beschreiben die Steigung einer Geraden durch (r_k, d_k) und den Ursprung. Für ein beliebiges k können wir d_k alternativ durch

$$\begin{aligned}
d_k &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot (r_i - r_{i-1}) \\
&= \lambda_1 r_1 + (\lambda_2 r_2 - \lambda_2 r_1) + (\lambda_3 r_3 - \lambda_3 r_2) + \ldots \\
&\quad + (\lambda_{k-1} r_{k-1} - \lambda_{k-1} r_{k-2}) + (\lambda_k r_k - \lambda_k r_{k-1}) \\
&= r_1(\lambda_1 - \lambda_2) + r_2(\lambda_2 - \lambda_3) + \ldots + r_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) + r_k \lambda_k
\end{aligned}$$

berechnen. Insbesondere ist $d_k \geq r_k\lambda_k$, da die Kette der Anstiege absteigt und somit $\lambda_k \leq \frac{d_k}{r_k}$. Damit folgt weiter $\lambda_{k+1} < \lambda_k \leq \frac{d_k}{r_k}$ und setzen wir für λ_{k+1} die Formel aus (a) ein, so erhalten wir nach entsprechenden Äquivalenzumformungen $\frac{d_{k+1}}{r_{k+1}} < \frac{d_k}{r_k}$. Also bilden $\frac{d_1}{r_1} > \ldots > \frac{d_n}{r_n}$ eine absteigende Kette.

Aufgabe 68 (3 Punkte)**.** Es seien $x, z \in \mathbb{R}$ mit $x < z$. Zeigen Sie, dass es unendlich viele rationale Zahlen $y \in \mathbb{Q}$ mit $x < y < z$ gibt.

Lösung. Da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ groß genug mit $\frac{1}{n_0} < z - x$. Wählen wir $k \in \mathbb{N}$ mit $y = \frac{k}{n_0} > x$ kleinst möglich, so folgt

$$y = \frac{k-1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < x + \frac{1}{n_0} < x + (z - x) = z.$$

Damit haben wir schon die Existenz eines solchen $y \in \mathbb{Q}$ gezeigt. Um unendlich viele weitere paarweise verschiedene rationale Zahlen zu erhalten, die zwischen x und z liegen, können wir das obige Verfahren einfach iterativ auf das Paar $x < y$ anwenden.

Aufgabe 69 (3+3 Punkte)**.** Es sei $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der folgenden Relation auf den reellen Zahlen.

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Z}.$$

Die Äquivalenzklasse von $x \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $(x + \mathbb{Z})$.

(a) Entscheiden Sie jeweils für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ob die induzierte Abbildung $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z},\ (x+\mathbb{Z}) \mapsto (f(x)+\mathbb{Z})$, wohldefiniert ist.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + 1$,
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x$,
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$,
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$,
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$,
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(2\pi x)$.

(b) Definiert die Addition reeller Zahlen auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ eine Gruppenstruktur? Bildet diese zusammen mit der Multiplikation die Struktur eines Ringes?

Lösung.

(a) Fixiere im folgenden Äquivalenzklassen $x+\mathbb{Z} = y+\mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und wähle $k \in \mathbb{Z}$, sodass $x = y + k$. Die durch f induzierte Abbildung $\bar{f}$ ist wohldefiniert, falls $\bar{f}(x + \mathbb{Z}) = \bar{f}(y + \mathbb{Z})$, bzw. $f(x) - f(y) \in \mathbb{Z}$.

- Die Abbildung ist wohldefiniert, da $f(x) - f(y) = (x+1) - (y+1) = (y+k+1) - (y+1) = k \in \mathbb{Z}$.
- Die Abbildung ist wohldefiniert, da $f(x) - f(y) = 2x - 2y = 2(y+k) - 2y = 2k \in \mathbb{Z}$.
- Die Abbildung ist nicht wohldefiniert, da für $x = \frac{4}{3}$ und $y = \frac{1}{3}$ gilt $f(x) - f(y) = \frac{16}{9} - \frac{1}{9} = \frac{15}{9} \notin \mathbb{Z}$.
- Die Abbildung ist nicht wohldefiniert, da für $x = 1$ und $y = 0$ gilt $f(x) - f(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
- Die Sinus Funktion nimmt nur ganzzahlige Werte auf Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ an. Wählen wir also $y = 0$ und $x = 1$, so ist $f(y) = 0$ ganzzahlig, $f(x) \approx 0.8414709848$ aber nicht. Damit ist $\bar{f}$ nicht wohldefiniert.
- Aufgrund der 2π-Periodizität des Kosinus ist $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$. Insbesondere gilt $f(x) = \cos(2\pi x) = \cos(2\pi(y+k)) = \cos(2\pi y + 2\pi k) = \cos(2\pi y)$ und $\bar{f}$ ist wohldefiniert.

(b) *Behauptung:* Die Addition $(x+\mathbb{Z}) + (y+\mathbb{Z}) = (x+y) + \mathbb{Z}$ definiert auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ eine Gruppenstruktur.

Offensichtlich ist $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ nach Definition unter der angegebenen Addition abgeschlossen und die Assoziativität folgt aus der Assoziativität der Addition auf $\mathbb{R}$. Seien also $x + \mathbb{Z}, y + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $x' = x + k$ und $y' = y + l$ aus der gleichen Äquivalenzklasse wie x, bzw. y. Dann zeigt

$$\begin{aligned}(x' + y') + \mathbb{Z} &= (x + k + y + l) + \mathbb{Z} \\ &= ((x+y) + (k+l)) + \mathbb{Z} \\ &= ((x+y) + \mathbb{Z}) + ((k+l) + \mathbb{Z}) \\ &= (x+y) + \mathbb{Z}\end{aligned}$$

die Wohldefiniertheit der Addition. Das neutrale Element ist $0 + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und für jedes Element $x + \mathbb{Z}$ ist das Inverse durch $(-x) + \mathbb{Z}$ gegeben. Damit bildet $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ eine Gruppe.

Behauptung: $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ bildet zusammen mit der Multiplikation $(x + \mathbb{Z})(y + \mathbb{Z}) = (xy) + \mathbb{Z}$ keinen Ring.

Angenommen es gibt ein neutrales Element $m + \mathbb{Z}$ bezüglich der Multiplikation. Dann gilt

$$\begin{aligned}x + \mathbb{Z} &= (x + \mathbb{Z})(m + \mathbb{Z}) \\ &= xm + \mathbb{Z}\end{aligned}$$

und somit ist $x(m-1) \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Aber das erzwingt m $= 1$ und mit $1 + \mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z}$ folgt $x - 0 \in \mathbb{Z}$, da

$$x + \mathbb{Z} = (x + \mathbb{Z})(1 + \mathbb{Z}) = (x + \mathbb{Z})(0 + \mathbb{Z}) = 0 + \mathbb{Z}.$$

Dies ist nicht der Fall, also kann ein solches Element nicht existieren. In der Tat ist der einzige Ring, in dem die neutralen Elemente für Addition und Multiplikation übereinstimmen, der Nullring.

Aufgabe 70 (2+2 Punkte)**.**

(a) Es sei $f(X) = X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ ein normiertes Polynom mit reellen Koeffizienten $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Sei $a_0 < 0$. Zeigen Sie, dass es reelle Zahlen $b, c, d_1, d_0 \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(X) = (X - b)(X - c)(X^2 + d_1X + d_0).$$

Hinweis: Sie dürfen Ihr Wissen über stetige Funktionen aus der Analysis verwenden.

(b) Finden Sie eine Darstellung wie in (a) des Polynoms

$$f(X) = X^4 + 2X^3 - X^2 + 4X - 6.$$

Lösung.

(a) Aus $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ und $f(0) = a_0 < 0$ folgt nach dem Zwischenwertsatz, dass reelle Zahlen $a < 0$ und $b > 0$ existieren mit $f(a) = f(b) = 0$. Polynomdivision liefert nun eindeutige Polynome $q(X)$ und $r(X)$, sodass $f(X) = q(X)(X - a) + r(X)$ und $\deg r(X) < \deg (X - a) = 1$. Damit muss $r(X) = c$ ein konstantes Polynom sein und $0 = f(a) = q(a)(a - a) + c = c$ zeigt, dass schon $r(X) = 0$ gilt. Wir erhalten also eine Darstellung $f(X) = q(X)(X - a)$. Da der Grad des Produktes von zwei Polynomen gleich der Summe der Grade der Faktoren ist, folgt weiter $\deg q(X) = 3$. Nun gilt ausserdem $0 = f(b) = q(b)(b - a)$ und mit $a \neq b$ wissen wir, dass b eine Nullstelle von $q(X)$ sein muss. Das gleiche Vorgehen wie oben gibt uns ein quadratisches Polynom $q'(X) = (X^2 + d_1X + d_0)$ mit $q(X) = q'(X)(X - b)$. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} f(X) &= q(X)(X - a) \\ &= q'(X)(X - b)(X - a) \\ &= (X^2 + d_1X + d_0)(X - b)(X - a). \end{aligned}$$

(b) Mit dem Satz über rationale Nullstellen finden wir schnell die Lösungen $f(1) = f(-3) = 0$. Wenden wir nun Polynomdivision wie im Teil (a) an, so erhalten wir

$$f(X) = (x - 1)(x + 3)(x^2 + 2).$$