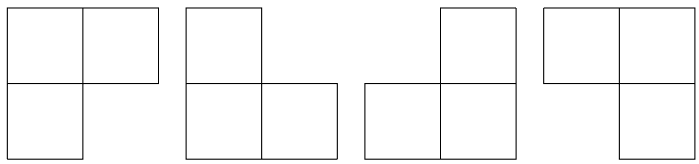
Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke — Lösung 4

Aufgabe 63 (3 Punkte)**.** Seien $d, n \in \mathbb{N}$ mit $2^n \leq d < 2^{n+1}$ und $d \equiv 2^n \bmod 6$. Zeigen Sie, dass ein $(d \times d)$-Spielbrett mit einem fehlenden Feld disjunkt in Teile der folgenden Form zerlegt werden kann.



Lösung. Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang ist klar, da wenn $n = 1$, $d = 2$ gelten muss damit weiterhin $d \equiv 2^n \bmod 6$ erfüllt ist und für ein 2×2 Spielbrett ist die Behauptung klar.

Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ können wir $d = 2^{n+1} + 6k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ schreiben. Das fehlende Feld muss in einem Quadranten mit Seitenlänge kleiner als 2^{n+1} liegen da $d < 2^{n+2}$. Darauf kann man nun die Induktionsvorrausetzung anwenden, das heißt dieser Quadrant ist zerlegbar in Teile der vier Formen. Der Rest lässt sich nun einfach mit 2×3 bzw. 3×2 Teilen überdecken und diese wiederum erhält man durch Zusammenfügen von den Teilen 1 und 3 bzw.den Teilen 2 und 4.

Aufgabe 64 (2+2+3+4 Punkte)**.** Wir definieren auf $\mathbb{Q}_+$ folgende Struktur,

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

für Paare teilerfremder Zahlen $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: Für $x, y \in \mathbb{Q}_+$ gilt $x \oplus y = x$ genau dann, wenn $x = y$.

(b) Seien $(k, l), (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Paare nicht notwendiger Weise teilerfremder natürlicher Zahlen. Berechnen Sie $\frac{k}{l} \oplus \frac{m}{n}$ in Termen von k, l, m, n.

Sei $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d} < 1$ (weiterhin $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ teilerfremd). Wir bezeichnen mit $K(\frac{a}{b})$ die Kreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2})$ und Radius $\frac{1}{2b^2}$.

(c) Malen Sie ein Bild von $K(\frac{a}{b})$, $K(\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d})$, $K(\frac{c}{d})$ für $b = 2$, $d = 3$.

(d) Zeigen Sie, dass $K(\frac{a}{b})$ und $K(\frac{c}{d})$ keine gemeinsamen inneren Punkte haben, und einander genau dann berühren, wenn $bc - ad = 1$. *Hinweis:* Vergleichen Sie die *Quadrate* der Summe der Radien und der Distanz der Mittelpunkte.

Lösung.

(a) Sei $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
x \oplus y &= x \\
\Leftrightarrow \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \\
\Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} &= \frac{a}{b} \\
\Leftrightarrow (a+c)b &= a(b+d) \\
\Leftrightarrow cb &= ad \\
\Leftrightarrow \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \\
\Leftrightarrow x &= y.
\end{aligned}$$

(b) Sei $g := ggT(k,l), h := ggT(m,n)$ Dann können wir schreiben: $k = k'g, l = l'g, m = m'h, n = n'h$.

$$\begin{aligned}
\frac{k}{l} \oplus \frac{m}{n} &= \frac{k'}{l'} \oplus \frac{m'}{n'} \\
&= \frac{k'+m'}{l'+n'} \\
&= \frac{\frac{k}{g} + \frac{m}{h}}{\frac{l}{g} + \frac{n}{h}} \\
&= \frac{kh+mg}{lh+ng}
\end{aligned}$$

(c) Siehe hier.

(d) Wenn wir zeigen können, dass die Quadrate der Summe der Radien kleiner als die Quadrate der Distanz der Mittelpunkte ist, für $bc - ad \neq 1$ und gleich wenn $bc - ad = 1$ sind wir fertig. Dies ist äquivalent zu:

$$(\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2})^2 \overset{!}{\leq} (\frac{1}{2d^2} - \frac{1}{2b^2})^2 + (\frac{a}{b} - \frac{c}{d})^2 \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b^2d^2} + \frac{2ac}{bd} \overset{!}{\leq} \frac{a^2d^2 + c^2b^2}{b^2d^2} \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 \overset{!}{\leq} (bc - ad)^2 \tag{3}$$

Da $(bc - ad) \in \mathbb{N}$, haben wir eine strikte Ungleichung für $(bc - ad) \neq 1$ und damit haben die Kreise in diesem Fall keine gemeinsamen inneren Punkte. Falls $(bc - ad) = 1$ haben wir Gleichheit in 3. und damit berühren sich die Kreise in einem Punkt.

Aufgabe 65 (4 Punkte)**.** Sei $f(X) = c_nX^n + \cdots + c_1X + c_0$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$, und sei $f(x) = 0$ für ein $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass die folgenden n Zahlen ganz sind.

$$c_nx^n + \ldots + c_1x,\ c_nx^{n-1} + \ldots + c_2x,\ \ldots,\ c_nx^2 + c_{n-1}x,\ c_nx$$

Lösung.

1. $c_nx^n + \ldots + c_1x = -c_0 \in \mathbb{Z}$
2. Schreibe $x = \frac{a}{b}$ als gekürzter Bruch. Angenommen

$$\begin{aligned} c_nx^{n-1} + \ldots + c_2x &\notin \mathbb{Z} \\ \Rightarrow c_nx^{n-1} + \ldots + c_2x + c_1 &\notin \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \frac{a}{b}(c_nx^{n-1} + \ldots + c_2x + c_1) = c_nx^n + \ldots + c_1x &\notin \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

da a, b teilerfremd sind und $(c_nx^{n-1} + \ldots + c_2x + c_1) = \frac{k}{b^m}$ für ein $k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ und k, b teilerfremd. Das ist jedoch ein Widerspruch zu 1. Für die restlichen Terme verfahre analog.

Aufgabe 66 (2+2 Punkte)**.**

(a) Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

$$\prod_{g \in G} g^2 = 1.$$

(b) Sei p eine Primzahl. Berechnen Sie $(p-1)!$ modulo p.

Lösung.

(a) Sei $|G| = n$ und sei $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ wobei oBdA die ersten $k \leq n$ Elemente selbstinvers seien. Jedes andere Element hat ein zu sich verschiedenes Inverses in G, da G eine Gruppe ist. Wir können die Elemente beliebig umordnen, da G abelsch ist. Dann gilt:

$$\prod_{g \in G} g^2 = \prod_{g \in G} g_1^2 \cdot \ldots \cdot g_k^2 \cdot (g_{k+1} \cdot \ldots \cdot g_n)^2 = 1.$$

(b) In $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ hat jedes Element a außer der Null ein multiplikatives Inverses. Da $a^2 = 1$ nur zwei Nullstellen haben kann, sind $\{p-1, 1\}$ alle Selbstinversen. Die Faktoren von $(p-1)!$ können so umgestellt werden, dass zueinander Inverse Elemente nebeneinander stehen Also:

$(p-1)! \equiv 1 \cdot (p-1) \equiv -1$ modulo p.