Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke Lösung 3

Aufgabe 60 (2+2 Punkte)**.**

(a) Ist die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$, injektiv/surjektiv/bijektiv?

(b) Gibt es einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Q}$?

Lösung.

(a) Die Abbildung ist nicht injektiv. Zum Beispiel gilt

$$f((2,4)) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = f((1,2))$$

Die Abbildung ist surjektiv. Da $\mathbb{Q}$ die Menge aller Zahlen ist, die sich als Bruch darstellen lassen gilt

$$q \in \mathbb{Q} \Rightarrow q = \frac{a}{b} \text{ mit } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \Rightarrow q = f((a,b)) \text{ mit } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$$

Die Abbildung ist nicht bijektiv, da sie nicht injektiv ist.

(b) Es existiert kein solcher Ringhomomorphismus (als Homomorphismus zwischen kommutativen Ringen mit 1). Wenn ein Ringhomomorphismus φ existieren würde, so müsste dieser folgendes erfüllen:

1. $\varphi(1) = 1$
2. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
3. $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

Aus $\varphi(0) = \varphi(0 + 0) = \varphi(0) + \varphi(0) = 2 \cdot \varphi(0)$ folgt, dass $\varphi(0) = 0$.
Aus $0 = \varphi(0) = \varphi(1 + (-1)) = \varphi(1) + \varphi(-1) = 1 + \varphi(-1)$ folgt

$$\varphi(-1) = (-1).$$

Es gilt $(\varphi(i))^2 = \varphi(i^2) = \varphi(-1) = (-1)$. Da aber $\varphi(i) \in \mathbb{Q}$ gilt auch $(\varphi(i))^2 \geq 0$. Dies ist ein Widerspruch. Also kann der geforderte Homomorphismus nicht existieren.

Aufgabe 61 (3+2+2+2+2 Punkte)**.** Ein Stammbruch ist eine rationale Zahl der Form $\frac{1}{n}$ für eine natürliche Zahl $n > 1$. Die Zahl $\frac{1}{4}$ lässt sich als $\frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$ als Summe zweier Stammbrüche darstellen.

(a) Zeigen Sie, dass jeder Stammbruch als Summe zweier verschiedener Stammbrüche dargestellt werden kann. Wann ist diese Darstellung eindeutig?

(b) Schreiben Sie $\frac{1}{6}$ als zwei unterschiedliche Summen zweier Stammbrüche.

(c) Kann jeder Stammbruch als Summe beliebig vieler paarweise verschiedener Stammbrüche dargestellt werden?

(d) Schreiben Sie $\frac{1}{n}$ als Summe von $8 - n$ Stammbrüchen für $n = 2, \ldots, 6$.

(e) Zeigen Sie, dass die Zahl $\frac{2}{m}$ für jede natürliche Zahl $m > 2$ als Summe zweier verschiedener Stammbrüche dargestellt werden kann.

Lösung. (a) Jeder Stammbruch hat die Form

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+n^2}$$

Für n nicht prim ist dieses nicht eindeutig. Sei $n = a \cdot b$ mit $a, b \neq n$. Dann gilt

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{ab} = \frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{ab(b+1)} = \frac{1}{n+b} + \frac{1}{n(b+1)}$$

Diese Darstellungsweise ist von der oberen verschieden, zum Beispiel da $1 \neq b \neq n^2$.

Für n prim und $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ gilt:

$a \cdot b = n \cdot (a + b)$

$\Rightarrow n|(a \cdot b) \Rightarrow n|a$ oder $n|b$

O.B.d.A. sagen wir $n|a$, also $a = k \cdot n$. Damit bleibt

$k \cdot n \cdot b = n \cdot (k \cdot n + b) \Rightarrow k \cdot b = k \cdot n + b \Rightarrow k|b$

Sei $b = k \cdot x$, dann

$k^2 \cdot x = k \cdot n + k \cdot x \Rightarrow k \cdot x = n + x \Rightarrow (k-1) \cdot x = n$. Da n sich nur als $n = 1 \cdot n$ darstellen lässt, bleiben zwei Möglichkeiten.

1. $(k-1) = 1$ und $x = n$

   Dann gilt $b = k \cdot x = 2n$ und $a = k \cdot n = 2n$. Dann haben die Brüche in der Darstellung jedoch denselben Nenner, also fällt diese Möglichkeit heraus.

2. $(k-1) = n$ und $x = 1$

   Dies führt auf die ganz oben angegebene Form.

Also ist für n prim die Darstellung eindeutig.

(b)

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{42} = \frac{1}{6} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$$

(c) Ja. Zu zeigen per Induktion. Der Induktionsanfang liegt hier bei $k = 2$ und entspricht Aufgabenteil (a).

Sei als Induktionsvoraussetzung eine Darstellung

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}$$

gegeben. O.B.d.A. können wir annehmen, dass die a_i sortiert sind, also $a_1 < a_2 < ... < a_k$. Dann gilt nach der Formel oben $\frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_k+1} + \frac{1}{a_k \cdot (a_k+1)}$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k+1} + \frac{1}{a_k \cdot (a_k+1)}$$

und da $a_k < a_k + 1 < a_k \cdot (a_k + 1)$ treten auch in der neuen Darstellung keine gleichen Nenner auf.

(d)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{n(n+1)^3} \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^4} + \frac{1}{n(n+1)^4} \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^4} + \frac{1}{(n+1)^5} + \frac{1}{n(n+1)^5}
\end{aligned}$$

(e) Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Die Zahl m ist gerade, dann gilt $m = 2k$ und $\frac{2}{m} = \frac{1}{k}$. Nach (a) gibt es dann die geforderte Darstellung.
2. Die Zahl m ist ungerade, dann gilt $m = 2k + 1$. Durch eine Betrachtung ähnlich wie oben ergibt sich

$$\frac{2}{m} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(2k+1)(k+1)}$$

Aufgabe 62 (2+2+3 Punkte)**.** Es sei $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ die Menge der positiven rationalen Zahlen.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}_+$ eine Gruppe bezüglich der Multiplikation ist.

(b) Beweisen Sie: Jedes $x \in \mathbb{Q}_+$ lässt sich eindeutig schreiben als Produkt

$$x = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$$

für Primzahlen $p_1 < \ldots < p_k$ und ganze Zahlen $e_1, \ldots, e_k \neq 0$ mit $k \geq 0$.

(c) Zeigen Sie, dass eine abelsche Gruppe G genau dann abzählbar ist, wenn es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Q}_+ \to G$ gibt.

Hinweis: Nutzen Sie die Existenz einer surjektiven Abbildung von der Menge aller Primzahlen zu der G zugrunde liegenden Menge aus. (Insbesondere bedeutet „abzählbar“ hier „endlich oder abzählbar unendlich“.)

Lösung. (a) 1. Es gibt ein neutrales Element.

Genau wie in $\mathbb{Q}$ selber ist $1_{\mathbb{Q}_+} = \frac{1}{1}$, es gilt $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ für alle $a, b \in \mathbb{N}$.

2. Es gibt zu jedem Element ein inverses Element.

Sei $x \in \mathbb{Q}$ gegeben. Dann hat x die Form $x = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$. Sei $y = \frac{b}{a}$, dann $x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = \frac{1}{1}$. Letzteres gilt nach Definition der Äquivalenzrelation, da $ab \cdot 1 = 1 \cdot ab$. Auch $y \cdot x = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ba}{ab} = \frac{ab}{ab} = \frac{1}{1}$. Also ist y zu x invers, $y = x^{-1}$.

3. Es gilt Assoziativität.

Für $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{ce}{df} = \frac{a(ce)}{b(df)} = \frac{(ac)e}{(bd)f} = \frac{ac}{bd} \cdot \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\mathbb{N}$ assoziativ ist.

(b) In $\mathbb{N}$ gilt die eindeutige Primfaktorzerlegung. Das heißt, dass es für jedes $a, b \in \mathbb{N}$ eine eindeutige solche Darstellung

$a = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ und $b = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{d_k}$

gibt. Dabei kann ohne Weiteres angenommen werden, dass die Menge der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ übereinstimmt, da wir für Primfaktoren, die in einer der Darstellungen nicht auftauchen, auch den Faktor $p_i^0 = 1$ ergänzen können.

Nun können wir

$$\frac{a}{b} = \frac{p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}}{p_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{d_k}} = \frac{p_1^{e_1}}{p_1^{d_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{e_k}}{p_k^{d_k}} = p_1^{e_1 - d_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k - d_k}$$

schreiben. Also hat jedes $\frac{a}{b}$ eine Darstellung der geforderten Art.

Angenommen, es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$, mit zwei Darstellungen dieser Art, also $x = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ und $x = p_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{d_k}$. Auch hier können wir wie oben annehmen, dass die Primzahlen in dieser Darstellung übereinstimmen oder nötigenfalls diese ergänzen. Dann gilt $p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k} = p_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{d_k} \Rightarrow p_1^{e_1 - d_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k - d_k} = 1$. Gleichzeitig hat $p_1^{e_1 - d_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k - d_k}$ die Form $\frac{a}{b}$, wobei alle p_i mit $e_i - d_i > 0$ in der Primfaktorzerlegung von a vorkommen, während alle p_i mit $e_i - d_i < 0$ in der Zerlegung von b vorkommen.

Da 1 die Form $1 = \frac{a}{a}$ mit $a \in \mathbb{N}$ hat, folgt, dass in der Darstellung von a und von b dieselben Primfaktoren vorkommen. Da jedes p_i mit $e_i - d_i \neq 0$ aber nur in einer der Darstellungen von a und b enthalten ist, folgt, dass keiner der Exponenten größer oder kleiner als 0 ist. Daher gilt $e_i = d_i$ für alle p_i und die Darstellung von x ist eindeutig.

(c) Angenommen es existiert ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Da $\mathbb{Q}_+$ abzählbar ist, ist auch das Bild, der Abbildung, also G abzählbar.

Angenommen G ist abzählbar. Da es abzählbar unendlich viele Primzahlen gibt, gibt es dann nicht nur eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to G$, sondern auch eine surjektive Abbildung $\mathbb{P} \to G$, wobei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen bezeichnet. Bezeichnen wir diese mit φ. Definieren wir nun einen Homomorphismus ψ von $\mathbb{Q}_+ \to G$ durch die Primzahlzerlegung aus (b), indem wir für $x = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ festlegen

$\psi(x) = (\varphi(p_1))^{e_1} \cdot ... \cdot (\varphi(p_k))^{e_k}$

Aus der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ergibt sich, dass die Abbildung wohldefiniert ist.

Es gilt $\psi(1) = 1$, da das Produkt auf der rechten Seite der Definition leer ist.

Sei nun $y = p_1^{d_1} \cdots p_k^{d_k}$ (wobei weder $e_i = 0$ oder $d_i = 0$ ausgeschlossen werden) dann gilt

$$\begin{aligned}\psi(x \cdot y) &= \psi(p_1^{e_1+d_1} \cdot ... \cdot p_k^{e_k+d_k}) = (\varphi(p_1))^{e_1+d_1} \cdot ... \cdot (\varphi(p_k))^{e_k+d_k} \\ &= ((\varphi(p_1))^{e_1} \cdot ... \cdot (\varphi(p_k))^{e_k}) \cdot ((\varphi(p_1))^{d_1} \cdot ... \cdot (\varphi(p_k))^{d_k}) \\ &= \psi(x) \cdot \psi(y)\end{aligned}$$

Also ist hier tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus gegeben. Da φ surjektiv war und $\mathbb{P}$ eine Untermenge von $\mathbb{Q}_+$ ist auf der $\varphi(x) = \psi(x)$ gilt, ist auch ψ surjektiv.