

Musterlösung Blatt 10

Aufgabe 89

Gegeben ist das Polynom

$$p(X) = X^3 - aX^2 + \frac{a^2}{3}X - \frac{14a^3}{3}$$

aus Lemma 190 ist bekannt, dass 1 eine Nullstelle von p ist, wenn $1 - \frac{a}{3}$ eine Nullstelle von

$$f(X) = X^3 + \left(3 \cdot \left(-\frac{a}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}(-a)^2 + \frac{a^2}{3}\right)X + \left(-\left(-\frac{a}{3}\right)^3 + (-a)\left(-\frac{a}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{3} \cdot \left(-\frac{a}{3}\right) + \left(-\frac{14a^3}{3}\right)\right)$$

~~$$= X^3 + \left(\frac{2}{3}(a^2 + a)\right)X + \left(\frac{a^3}{27} - \frac{a^3}{9} + \frac{a^3}{9} - \frac{14a^3}{3}\right)$$~~

~~$$= X^3 + \frac{2}{3}a(a+1)X + \left(-\frac{125a^3}{27}\right)$$~~

$$= X^3 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)a^2X + \left(-\frac{125}{27}a^3\right) \quad \text{ist}$$

$$= X^3 - \frac{125}{27}a^3 \quad \text{ist}$$

Die Gleichung $X^3 - \frac{125}{27}a^3 = 0$ gilt gdw. $X^3 = \frac{125}{27}a^3$.

Da $\frac{125}{27}a^3 = \left(\frac{5}{3}a\right)^3$ ist $X = \frac{5}{3}a$ eine Lösung.

Die anderen zwei Lösungen ergeben sich durch multiplizieren mit $e^{i\frac{2}{3}\pi}$ und $e^{i\frac{4}{3}\pi}$.

$$\text{D.h. } f(X) = \left(X - \frac{5}{3}a\right)\left(X - e^{2\pi i/3} \frac{5}{3}a\right)\left(X - e^{4\pi i/3} \frac{5}{3}a\right)$$

Rücksubstitution gibt:

$$p(X) = (X - 2a)\left(X - \frac{1}{3}a - e^{2\pi i/3} \frac{5}{3}a\right)\left(X - \frac{1}{3}a - e^{2\pi i/3} \frac{5}{3}a\right)$$

Das ist bereits eine irreduzible Zerlegung in $\mathbb{C}[X]$ und in $\mathbb{R}[X]$ für $a \neq 0$.

Sei nun $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}\text{Dann war } f(X) &= (X - \frac{5}{3}a) \left(X^2 - e^{\frac{2\pi i}{3}} \frac{5}{3}aX - e^{\frac{4\pi i}{3}} \frac{5}{3}aX + e^{\frac{2\pi i}{3}} \frac{25}{9}a^2 \right) \\ &= (X - \frac{5}{3}a) \left(X^2 + (-\frac{5}{3}a) (e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}}) X + \frac{25}{9}a^2 \right) \\ &= (X - \frac{5}{3}a) \left(X^2 + \frac{5}{3}aX + \frac{25}{9}a^2 \right)\end{aligned}$$

Hier wurde benutzt, dass $e^{\frac{2\pi i}{3}} = e^{\frac{4\pi i}{3}}$ und dass $\operatorname{Re}(e^{\frac{2\pi i}{3}}) = -\frac{1}{2}$.

Rücksubstitution gibt

$$\begin{aligned}p(X) &= (X - 2a) \left((X - \frac{a}{3})^2 + \frac{5}{3}a(X - \frac{a}{3}) + \frac{25}{9}a^2 \right) \\ &= (X - 2a) \left(X^2 - \frac{2a}{3}X + \frac{a^2}{9} + \frac{5a}{3}X - \frac{5a^2}{9} + \frac{25a^2}{9} \right) \\ &= (X - 2a) \left(X^2 + aX + \frac{7}{3}a^2 \right)\end{aligned}$$

Aufgabe 90

a) Ist $f(X) = X^3 + aX + b$, dann ist $3X^2 + a$ die formale Ableitung. Deren Nullstellen sind

$$\alpha = \sqrt{\frac{a}{3}}, \beta = -\sqrt{\frac{a}{3}}, \text{ falls } a \geq 0$$

und $\alpha = i\sqrt{\frac{-a}{3}}, \beta = -i\sqrt{\frac{-a}{3}}$ für $a < 0$. Es gilt immer $\alpha = -\beta$.

$$\begin{aligned}f(\alpha) \cdot f(\beta) &= f(\alpha) \cdot f(-\alpha) = (\alpha^3 + a\alpha + b) \cdot (-\alpha^3 - a\alpha + b) \\ &= -\alpha^6 - \alpha^4 a - \alpha^3 b - a\alpha^4 - a^2 \alpha^2 - \alpha ab + b\alpha^3 + ab\alpha + b^2 \\ &= -\alpha^6 + a(-\alpha^4 - \alpha^4) + b(-\alpha^3 + \alpha^3) + ab(-\alpha + \alpha) + a^2(-\alpha^2) + b^2 \\ &= -\alpha^6 - 2\alpha^4 a - \alpha^2 a^2 + b^2 \\ &= +\sqrt{\frac{\pm a}{3}}^6 - 2\sqrt{\frac{\pm a}{3}}^4 a + \sqrt{\frac{\pm a}{3}}^2 a^2 + b^2 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

" $\Rightarrow$ " Habe f drei reelle Nullstellen $x_1 < x_2 < x_3$.

Dann muss es $x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3$; α, β geben mit $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$.

Es muss $f(\alpha) \neq 0$ gelten, da f bereits 3 Nullstellen hat.

Sei o.B.d.A. $f(\alpha) > 0$.

Auch $f(\beta) \neq 0$ muss gelten.

Wäre $f(\beta) > 0$ so wäre das gesamte Intervall (x_2, x_3) unter f positiv, da f keine NST in (x_2, x_3) hat. Ebenso muss (x_1, x_2) größer Null sein unter f . Dann wäre aber x_2 ein lokales Minimum, hätte also Ableitung 0. Dann hätte f' mindestens drei Nullstellen. f' ist aber Polynom vom Grad 2.

Somit muss $f(\beta) < 0$ sein und daher

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0.$$

" $\Leftarrow$ " Sei $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, d.h. $\frac{(\pm a)^3}{27} - 2 \frac{(\pm a)^2}{9} a + \frac{\pm a}{3} a^2 + b^2 < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\pm a^3}{27} - \frac{6a^3}{27} \pm \frac{9a^3}{27} + b^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow a^3(\pm 1 - 6 \pm 9) < \text{[scribble]} - b^2 \cdot 27$$

1. Fall: $a > 0$, dann sind die Hochpunkte reelle und haben unterschiedliche Vorzeichen. Nach Zwischenwertsatz erhält man 3 verschiedene Nullstellen.

2. Fall: $a = 0$, dann ist $\alpha = \beta = 0$ und $f(\alpha)f(\beta) = f(0)^2 = b^2 \geq 0$. Dieser Fall tritt also nicht ein,

3. Fall: $a < 0$. In dem Fall wird die Gleichung mit den Minuszeichen gelöst, also

$-16a^3 < -27b^2$. Da a^3 negativ ist muss $-16a^3$ positiv sein. $-27b^2$ dagegen ist negativ. Somit kann die Gleichung nicht erfüllt sein.

$\Rightarrow$ Es gibt es verschiedene Nullstellen.

b) Berechne zuerst $\phi_g(t)$. Nach Blatt 7 Aufgabe 79 b) gilt $\phi_g(t) = \frac{t^9 - 1}{t^3 - 1} = t^6 + t^3 + 1$, dies sollte auch aus 79 d), e) folgen.

$$\phi_g(t)' = 6t^5 + 3t^2.$$

Über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ wird das zu $t^5 + 3t^2 = t^2(t^3 + 3)$.

Finde/Suche NST von $t^3 + 3$ durch einsetzen der 5 möglichen Kandidaten.

$\leadsto$ [3] ist NST, denn $3^3 + 3 = 27 + 3 = 30 \equiv 0 \pmod{5}$.

Pol. Div.

$\leadsto \phi_g'(t) = t^2(t+2)(t^2+3t+4)$. Da keiner der Faktoren Nullstellen besitzt ist die Zerlegung irreduzibel.

Aufgabe 91

$$E = \{ a+ib \in \mathbb{C} \mid a^3+17=b^2 \}$$

a) Stelle die Geradengleichung auf. Diese ist

$$\begin{aligned} y+t(x-y) &= -2-3i+t(6+12i) \\ &= -2+6t+i(-3+12t). \end{aligned}$$

Setze diese in $a^3+17=b^2$ ein und löse nach t .

$$\Rightarrow (-2+6t)^3+17 = (-3+12t)^2$$

$$\Leftrightarrow -8+72t-216t^2+216t^3+17 = 9-72t+144t^2$$

$$\Leftrightarrow 216t^3-360t^2+144t = 0$$

$$\Leftrightarrow t=0 \vee t=1 \vee 216t-144=0$$

$$\Leftrightarrow t=0 \vee t=1 \vee t=\frac{2}{3}.$$

Für $t=0$ und $t=1$ erhält man die Punkte y und x .
Somit liegen diese auf in E .

Für $t=\frac{2}{3}$ ist der Punkt

$$-2-3i+\frac{2}{3}(6+12i) = -2-3i+4+8i = 2+5i.$$

b) Die Gerade durch $\bar{y}$ und $z=8+23i$ schneidet E nur in zwei Punkten. Die Geradengleichung

$$\bar{y}+t(z-\bar{y}) = -2+3i+t(8+23i+2-3i) = -2+10t+i(3+20t)$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt sich:

$$(-2+10t)^3 + 17 = (3+20t)^2$$

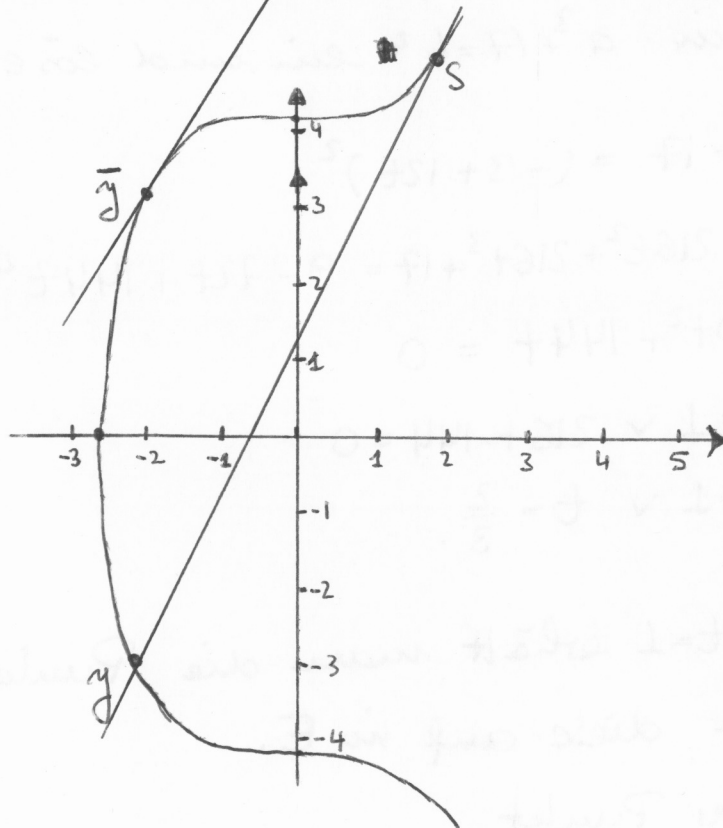
$$\Leftrightarrow -8 + 120t - 600t^2 + 1000t^3 + 17 = 9 + 120t + 400t^2$$

$$\Leftrightarrow 1000t^3 - 1000t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t=0 \vee t=1$$

Für die beiden Lösungen erhält man die Punkte $\bar{y}$ und z .

c)



Aufgabe 92

Die Bedingung $\frac{iz}{\sqrt{y}} \in \mathbb{R}$ ist äquivalent dazu, dass $iz = r\sqrt{y}$, d.h. z und $\sqrt{y}$ sind orthogonal zueinander.

Die Abbildung $x \mapsto \bar{x}y$ stellt immer eine Geraden Spiegelung dar, denn $x \mapsto \bar{x}$ spiegelt $\mathbb{C}$ an $\mathbb{R}$ und Multiplikation mit $y = e^{i\varphi}$ dreht die gespiegelte Ebene um φ . Das entspricht einer Spiegelung an der Geraden durch 0 und $e^{i\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{y}$. Wie muss nun z sein, damit die Spiegelung erhalten bleibt? Ist z orthogonal zu $\sqrt{y}$, dann ist die Abbildung $x \mapsto \bar{x}y + z$ eine Spiegelung an der Geraden durch $\frac{z}{2}$ und $\sqrt{y} + \frac{z}{2}$.

Sei umgekehrt durch $\sigma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \bar{x}y + z$ eine Spiegelung gegeben, dann gilt $\sigma^2 = \text{id}_{\mathbb{C}}$, d.h. $\sigma = \sigma^{-1}$.

Somit ist $0 = \text{id}_{\mathbb{C}}(0) = \sigma^2(0) = \sigma(\sigma(0)) = \sigma(z) = \bar{z}y + z$.

$$\Rightarrow y = -\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{z}{\bar{z}} \cdot \frac{z}{z} = -\frac{z^2}{|z|^2}.$$

$\Rightarrow$ Eine Wurzel davon ist $i\frac{z}{|z|}$.

$$\Rightarrow \sqrt{y} = \frac{iz}{|z|} \Rightarrow \frac{iz}{\sqrt{y}} = |z| \in \mathbb{R} \text{ wie gefordert.}$$

Bei der Umformung wurde $z \neq 0$ angenommen.

Der Fall $z = 0$ erfüllt immer $\frac{iz}{\sqrt{y}} \in \mathbb{R}$, da $\frac{iz}{\sqrt{y}} = 0$ ist.

Aufgabe 93

Sei M die Menge aller Geraden, die mindestens zwei Punkte aus S enthalten. M ist endlich, da S endlich ist und es für $|S|=n$ nur höchstens $\frac{n(n-1)}{2}$ verschiedene Geraden gibt.

Für jede Gerade $L \in M$ gibt es mindestens einen Punkt $x \in S \setminus L$, da nicht alle Punkte auf einer Geraden liegen. Wähle L', x' so, dass $x' \notin L'$ und $L' \in M$ und der Abstand von x' zu L' minimal ist unter allen solchen ~~Pärchen~~ Pärchen.

Annahme: Habe L' mindestens drei Punkte aus S .

Sei y die orthogonale Projektion von x' auf L' .

Dann müssen mindestens zwei der drei Punkte $P_0, P_1, P_2 \in L' \cap S$ auf einer Seite von y liegen.

(Man kann L' orientieren, dann gilt o.B.d.A. $P_0 < P_1 < P_2$. Außerdem ist $P_1 \leq y$ oder $P_1 > y$)

Sei $P_0 < P_1 \leq y$, dann ist G Gerade durch P_0 und x' , somit in M , außerdem ist $P_1 \notin G$, aber der Abstand von P_1 zu G ist kleiner als der von x' zu L' , denn der Abstand von P_1 zu G ist kleiner als der von y zu G . Dieser ist ~~kleiner~~ echt kleiner als der von y zu $x' \in G$. Das war aber der Abstand von x' zu L' da y nächster Punkt zu x' auf L' war. Widerspruch zur Wahl von L' .
Die Annahme ist falsch und die Aussage bewiesen.