Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke Übungsblatt 9

Aufgabe 86 (2+3 Punkte)**.** Seien $x, y \in \mathbb{C}$ zwei Punkte auf dem Einheitskreis. Es bezeichne T_x die Tangente des Einheitskreises an x.

(a) Berechnen Sie $T_x \cap \mathbb{R}$. *Hinweis:* Benutzen Sie Aufgabe 85 (b).

(b) Sei $x \neq -y$. Zeigen Sie, dass T_x und T_y einander im Punkt $\frac{2xy}{x+y}$ schneiden.

Aufgabe 87 (3+2+2 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, und μ_n die Menge der n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$. Wir bezeichnen mit O_2 die Menge der linearen euklidischen Bewegungen $\beta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass O_2 bezüglich der Komposition eine Gruppe bildet.

(b) Beweisen Sie, dass

$$D_n = \{\beta \in O_2 \mid \beta(\mu_n) = \mu_n\}$$

eine Untergruppe von O_2 ist.

(c) Bestimmen Sie die Ordnung (= Kardinalität) von D_n.

Aufgabe 88 (4+3+3 Punkte)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Finden Sie die komplexen Nullstellen der folgenden Polynome.

$$X^3 + 4X + 5, \qquad X^2 - e^{\pi i/4} \sqrt[4]{48} X + 1, \qquad X^{10} + aX^5 + b, \qquad iX^3 + X^2 + iX + 1.$$

(b) Sei $\zeta \in \mu_5$ und $\eta = e^{2\pi i/3}$. Schreiben Sie das Polynom

$$(X^2 - \zeta\eta)(X^2 - \zeta\overline{\eta}) + \zeta + 1 \in \mathbb{C}[X]$$

als ein Produkt zweier nicht-konstanter Faktoren in $\mathbb{C}[X]$.

(c) Zerlegen Sie das Polynom $X^2 - (2a - b)X + (a^2 - ab + b^2)$ sowohl über $\mathbb{C}$ als auch über $\mathbb{R}$ in irreduzible Faktoren (in Abhängigkeit von a, b).

Hinweis: Multiplizieren Sie zunächst mit $X - (a + b)$.

Abgabe: Donnerstag, 06.07.2017 um 14:00