Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke Übungsblatt 8

Aufgabe 82 (4+2+2 Punkte). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in Polarkoordinaten dar.

$$\sin(\alpha) + i\cos(\alpha), \qquad i^n \text{ (für } n \in \mathbb{Z}), \qquad \sqrt{15} + i\sqrt{5}, \qquad (1+i)\sqrt{6} - (1-i)\sqrt{2}$$

(b) Sei r eine positive reelle Zahl. Bestimmen Sie die Quadratwurzel von $r \cdot e^{i\alpha}$.

(c) Schreiben Sie $2\sqrt{\sqrt{3} + i} = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 83 (2+2+2+2 Punkte). Eine Abbildung $\beta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt euklidische Bewegung, falls für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$|\beta(x) - \beta(y)| = |x - y|.$$

(a) Sei $A = (v, w) \in \mathbb{C}^2$. Zeigen Sie, dass eine Abbildung der Form

$$\beta_A\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ a + bi \mapsto av + bw,$$

genau dann eine euklidische Bewegung ist, wenn v und w auf dem Einheitskreis liegen und $v \cdot i\overline{w} \in \mathbb{R}$ ist.

(b) Folgern Sie: Ist β_A eine euklidische Bewegung, so gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$v = e^{i\alpha} \text{ und } w = \pm i \cdot e^{i\alpha}.$$

(c) Eine euklidische Bewegung $\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt linear, falls für alle $x, y \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R}$ folgende Bedingungen erfüllt sind:
- $\beta(x + y) = \beta(x) + \beta(y)$,
- $\beta(a \cdot x) = a \cdot \beta(x)$.

Zeigen Sie, dass jede lineare euklidische Bewegung β von der Form $\beta = \beta_A$ für ein $A \in \mathbb{C}^2$ ist.

(d) Geben Sie ein Beispiel einer nicht-linearen euklidischen Bewegung $\beta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an.

Aufgabe 84 (2 Punkte). Seien $x, y \in \mathbb{C}$ zwei Punkte auf dem Einheitskreis. Zeigen Sie, dass falls $z \in \mathbb{C}$ auf der Geraden durch x und y liegt, so

$$\overline{z} = \frac{x + y - z}{xy}$$

ist.

Aufgabe 85 (2+2 Punkte)**.** Seien $w, x, y, z \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden.

(a) Beweisen Sie, dass x, y, z genau dann auf einer Geraden liegen, wenn gilt
$$\frac{\overline{x} - \overline{y}}{x - y} = \frac{\overline{x} - \overline{z}}{x - z}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Geraden $L, L' \subseteq \mathbb{C}$ mit $w, x \in L$ und $y, z \in L'$ genau dann orthogonal zueinander sind, wenn gilt
$$\frac{\overline{w} - \overline{x}}{w - x} = \frac{\overline{z} - \overline{y}}{y - z}.$$

Abgabe: Donnerstag, 29.06.2017 um 14:00