

Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke

Übungsblatt 7

Aufgabe 79 (2+2+2+2+2 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$. Das n -te Kreisteilungspolynom Φ_n ist induktiv definiert als normiertes Polynom in $\mathbb{Z}[t]$ via

$$t^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(t).$$

Die Nullstellen von Φ_n in $\mathbb{C}$ sind die *primitiven* n -ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$. Die Möbiusfunktion $\mu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist definiert durch

$$\mu(d) = \begin{cases} (-1)^r & \text{falls } d = p_1 \cdots p_r \text{ für } p_1, \dots, p_r \text{ prim mit } p_i \neq p_j \text{ für } i \neq j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Sei $\chi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$. Zeigen Sie: Ist $n \geq 2$, so ist $\chi(n) = 0$.

Hinweis: Sei $p|n$ ein Primteiler. Betrachten Sie $p \nmid d$ und $p|d$ getrennt.

(b) Begründen Sie jede Gleichheit in folgendem Beweis:

$$\prod_{d|n} (t^{n/d} - 1)^{\mu(d)} = \prod_{(*)} \Phi_c(t)^{\mu(d)} = \prod_{c|n} \Phi_c(t)^{\sum_{(*)} \mu(d)} = \prod_{c|n} \Phi_c(t)^{\chi(n/c)} = \Phi_n(t),$$

wobei $(*)$ für die Bedingung $d|n \wedge c|\frac{n}{d}$ steht.

(c) Bestimmen Sie Φ_{10} explizit. Malen Sie ein Bild der primitiven zehnten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$.

(d) Zeigen Sie, dass für $d|n$ gilt $\frac{t^n-1}{t^d-1} = t^{n-d} + t^{n-2d} + \dots + t^d + 1$.

(e) Sei p eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie Φ_{p^k} .

Aufgabe 80 (3+3+3 Punkte).

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Gleichung $a^2 + b^2 = 5^k$ besitzt genau $4 \cdot (k+1)$ ganzzahlige Lösungen $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Finden Sie für jedes $0 \leq l \leq \frac{k}{2}$ eine solche via

$$5^k = (2+i)^l (2-i)^{k-l} \cdot (2+i)^{k-l} (2-i)^l.$$

Konstruieren Sie aus jeder Lösung acht weitere (außer für $l = \frac{k}{2}$ vier).

(b) Zeigen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Kreis im $\mathbb{R}^2$ gibt, auf welchem genau n ganzzahlige Punkte liegen.

Hinweis: Betrachten Sie den Kreis $S(n)$, welcher definiert ist durch

$$\begin{aligned} (2x-1)^2 + (2y)^2 &= 5^{k-1} & \text{für } n = 2k, \\ (3x-1)^2 + (3y)^2 &= 5^{2k} & \text{für } n = 2k+1. \end{aligned}$$

Benutzen Sie (a). Überlegen Sie, welche Einschränkung $S(n)$ an (a, b) stellt.

(c) Malen Sie ein Bild von $S(n)$ für $n = 1, 2, 3, 4$.

Aufgabe 81 (3 Punkte). Für zwei Punkte $v, w \in \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir mit

$$[v, w] = \{t \cdot v + (1 - t) \cdot w \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

die Linie, welche sie verbindet. Seien nun $v \neq w$ zwei verschiedene Punkte auf dem Graphen der Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Berechnen Sie den Schnittpunkt von $[v, w]$ mit der y -Achse.