

Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke

Übungsblatt 6

Hinweis: Die Fachschaft Mathematik feiert am 01.06. ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 29.05., Di. 30.05. und Mi. 31.05. in der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weiteren Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de

Aufgabe 71 (3+3 Punkte).

(a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen als $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

$$i^n \text{ (für } n \in \mathbb{Z}), \quad \frac{1-i}{1+i}, \quad \frac{1+2i}{(2+3i)^2}.$$

(b) Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem in $\mathbb{C}$.

$$ix - 3y = 1$$

$$2x + iy = 2i$$

Aufgabe 72 (2+2+2 Punkte). Sei $f(X) = z_n X^n + \dots + z_1 X + z_0 \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten $z_n, \dots, z_0 \in \mathbb{C}$. Wir bezeichnen das komplex konjugierte Polynom von f mit

$$\overline{f}(X) = \overline{z}_n X^n + \dots + \overline{z}_1 X + \overline{z}_0.$$

(a) Beweisen Sie: Hat f nur reelle Nullstellen und ist $z_n \in \mathbb{R}$, so ist auch $f = \overline{f}$.

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f . Zeigen Sie: Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so gilt auch

$$\overline{f}(\alpha) = 0.$$

Beweisen Sie andererseits, dass falls $z_{n-1}, \dots, z_0 \in \mathbb{R}$ sind, so auch

$$f(\overline{\alpha}) = 0.$$

(c) Angenommen $\overline{f} \neq -f$. Zeigen Sie, dass $f(X) \cdot X^{n+1} + \overline{f}(X)$ höchstens $n+1$ reelle Nullstellen hat. Ist diese Abschätzung optimal?

Aufgabe 73 (4 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}$$

Aufgabe 74 (3+3 Punkte).

- (a) Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ nicht-negative reelle Zahlen. Das geometrische Mittel ist durch das arithmetische Mittel beschränkt:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Zeigen Sie dies für $n = 2$. Wann gilt Gleichheit?

- (b) Verifizieren Sie die Ungleichung aus (a) für folgende Beispiele.

- $(x_1, x_2, x_3) = (3, 6, 12)$.
- $(x_1, x_2) = (\frac{14}{3}, \frac{7}{6})$.
- $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}, \frac{8}{5})$.

Wiederholungsaufgaben

Die Abgabe der Wiederholungsaufgaben ist freiwillig, wird jedoch allen sehr empfohlen. Wer alle Aufgaben bearbeitet hat und insgesamt die Hälfte der möglichen Punkte erreicht, erhält 12 BONUSPUNKTE, die zusätzlich für die Zulassung zählen.

Aufgabe 75 (2 Punkte). Finden Sie alle Lösungen $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ der Gleichung

$$a^a + b^b = c^c.$$

Aufgabe 76 (6 Punkte).

- (a) Bestimmen Sie die Endziffer der Zahl 3^{1234} .
- (b) Sei R ein Ring und $x \in R$. Zeigen Sie, dass für gerade $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x^n - 1 = (x + 1) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} x^k.$$

- (c) Bestimmen Sie die vorletzte Ziffer der Zahl 3^{1234} .

Aufgabe 77 (4 Punkte). Sei K ein Körper, sowie $a, b, c \in K$ mit $a \neq 0$. Sei x eine Nullstelle des Polynoms $aX^4 + bX^3 + cX^2 + bX + a$.

- (a) Zeigen Sie, dass $x + \frac{1}{x}$ die Nullstelle eines quadratischen Polynoms mit Koeffizienten in K ist.
- (b) Sei $K = \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie alle möglichen $x + \frac{1}{x}$ für $(a, b, c) = (1, -3, \frac{1}{4})$.

Aufgabe 78 (12 Punkte). Es sei $\mathbb{R}[t]$ der Polynomring in einer Unbestimmten mit reellen Koeffizienten. Wir bezeichnen mit

$$\delta: \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}[t], f \mapsto f',$$

die Ableitungsfunktion. Weiterhin definieren wir die Abbildung

$$\gamma: \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}[t], f \mapsto t \cdot f'.$$

(a) Ist δ bzw. γ ein Ringhomomorphismus?

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei $\mathbb{R}[t]/(t^n)$ die Menge der Äquivalenzklassen von Polynomen bezüglich der Relation $f \sim g \Leftrightarrow t^n \mid (f - g)$ auf $\mathbb{R}[t]$.

(b) Zeigen Sie, dass jede Äquivalenzklasse $f + (t^n)$ genau ein Polynom vom Grade $< n$ enthält.

(c) Untersuchen Sie die induzierten Abbildungen

$$\bar{\delta}: \mathbb{R}[t]/(t^n) \rightarrow \mathbb{R}[t]/(t^n), f + (t^n) \mapsto \delta(f) + (t^n),$$

$$\bar{\gamma}: \mathbb{R}[t]/(t^n) \rightarrow \mathbb{R}[t]/(t^n), f + (t^n) \mapsto \gamma(f) + (t^n),$$

auf Wohldefiniertheit.

(d) Sei $\alpha = at + b + (t^2) \in \mathbb{R}[t]/(t^2)$, und sei $f \in \mathbb{R}[t]$. Zeigen Sie:

$$f(\alpha) = f(b) + f'(b)at + (t^2).$$

(e) Bestimmen Sie die Einheitengruppe von $\mathbb{R}[t]/(t^2)$.

(f) Geben Sie ein Beispiel eines nicht-konstanten invertierbaren Polynoms an.

Hinweis: Betrachten Sie den Polynomring $R[X]$ über $R = \mathbb{R}[t]/(t^2)$.