

Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke

Übungsblatt 5

Aufgabe 67 (3+2+4 Punkte). Sei $\mathcal{P}$ ein Polygon im $\mathbb{R}^2$ mit Eckpunkten

$$(r_0, d_0) = (0, 0), (r_1, d_1), \dots, (r_n, d_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R},$$

dessen Anstiege eine absteigende Kette rationaler Zahlen $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$ bilden.

(a) Sei $n = 4$, sowie $(r_1, \dots, r_4) = (1, 3, 5, 7)$ und $(d_1, \dots, d_4) = (1, 2, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$.

Berechnen Sie $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ und malen Sie ein Bild von $\mathcal{P}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Eckpunkte von $\mathcal{P}$ rational sind, indem Sie berechnen:

$$d_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot (r_i - r_{i-1}).$$

(c) Bilden die Zahlen $\frac{d_1}{r_1}, \dots, \frac{d_n}{r_n} \in \mathbb{Q}$ ebenfalls eine absteigende Kette? Was ist ihre geometrische Bedeutung? Tragen Sie sie in Ihr Bild aus (a) ein.

Aufgabe 68 (3 Punkte). Es seien $x, z \in \mathbb{R}$ mit $x < z$. Zeigen Sie, dass es unendlich viele rationale Zahlen $y \in \mathbb{Q}$ mit $x < y < z$ gibt.

Aufgabe 69 (3+3 Punkte). Es sei $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der folgenden Relation auf den reellen Zahlen.

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Die Äquivalenzklasse von $x \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $(x + \mathbb{Z})$.

(a) Entscheiden Sie jeweils für die folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ob die induzierte Abbildung $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $(x + \mathbb{Z}) \mapsto (f(x) + \mathbb{Z})$, wohldefiniert ist.

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$,
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$,
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$,
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$,
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$,
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(2\pi x)$.

(b) Definiert die Addition reeller Zahlen auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ eine Gruppenstruktur? Bildet diese zusammen mit der Multiplikation die Struktur eines Ringes?

Aufgabe 70 (2+2 Punkte).

- (a) Es sei $f(X) = X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ ein normiertes Polynom mit reellen Koeffizienten $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Sei $a_0 < 0$. Zeigen Sie, dass es reelle Zahlen $b, c, d_1, d_0 \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(X) = (X - b)(X - c)(X^2 + d_1X + d_0).$$

Hinweis: Sie dürfen Ihr Wissen über stetige Funktionen aus der Analysis verwenden.

- (b) Finden Sie eine Darstellung wie in (a) des Polynoms

$$f(X) = X^4 + 2X^3 - X^2 + 4X - 6.$$