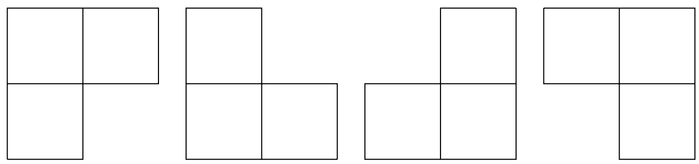
Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke Übungsblatt 4

Aufgabe 63 (3 Punkte)**.** Seien $d, n \in \mathbb{N}$ mit $2^n \leq d < 2^{n+1}$ und $d \equiv 2^n \bmod 6$. Zeigen Sie, dass ein $(d \times d)$-Spielbrett mit einem fehlenden Feld disjunkt in Teile der folgenden Form zerlegt werden kann.



Aufgabe 64 (2+2+3+4 Punkte)**.** Wir definieren auf $\mathbb{Q}_+$ folgende Struktur,

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

für Paare teilerfremder Zahlen $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: Für $x, y \in \mathbb{Q}_+$ gilt $x \oplus y = x$ genau dann, wenn $x = y$.

(b) Seien $(k, l), (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Paare nicht notwendiger Weise teilerfremder natürlicher Zahlen. Berechnen Sie $\frac{k}{l} \oplus \frac{m}{n}$ in Termen von k, l, m, n.

Sei $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d} < 1$ (weiterhin $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ teilerfremd). Wir bezeichnen mit $K(\frac{a}{b})$ die Kreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt $(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2})$ und Radius $\frac{1}{2b^2}$.

(c) Malen Sie ein Bild von $K(\frac{a}{b})$, $K(\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d})$, $K(\frac{c}{d})$ für $b = 2$, $d = 3$.

(d) Zeigen Sie, dass $K(\frac{a}{b})$ und $K(\frac{c}{d})$ keine gemeinsamen inneren Punkte haben, und einander genau dann berühren, wenn $bc - ad = 1$. *Hinweis:* Vergleichen Sie die *Quadrate* der Summe der Radien und der Distanz der Mittelpunkte.

Aufgabe 65 (4 Punkte)**.** Sei $f(X) = c_n X^n + \cdots + c_1 X + c_0$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$, und sei $f(x) = 0$ für ein $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass die folgenden n Zahlen ganz sind.

$$c_n x^n + \ldots + c_1 x,\ c_n x^{n-1} + \ldots + c_2 x,\ \ldots,\ c_n x^2 + c_{n-1} x,\ c_n x$$

Aufgabe 66 (2+2 Punkte)**.**

(a) Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

$$\prod_{g \in G} g^2 = 1.$$

(b) Sei p eine Primzahl. Berechnen Sie $(p-1)!$ modulo p.

Abgabe: Donnerstag, 18.05.2017 um 14:00