

Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke

Übungsblatt 3

Aufgabe 60 (2+2 Punkte).

- (a) Ist die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, $(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$, injektiv/surjektiv/bijektiv?
- (b) Gibt es einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Q}$?

Aufgabe 61 (3+2+2+2+2 Punkte). Ein Stammbruch ist eine rationale Zahl der Form $\frac{1}{n}$ für eine natürliche Zahl $n > 1$. Die Zahl $\frac{1}{4}$ lässt sich als $\frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$ als Summe zweier Stammbrüche darstellen.

- (a) Zeigen Sie, dass jeder Stammbruch als Summe zweier verschiedener Stammbrüche dargestellt werden kann. Wann ist diese Darstellung eindeutig?
- (b) Schreiben Sie $\frac{1}{6}$ als zwei unterschiedliche Summen zweier Stammbrüche.
- (c) Kann jeder Stammbruch als Summe beliebig vieler paarweise verschiedener Stammbrüche dargestellt werden?
- (d) Schreiben Sie $\frac{1}{n}$ als Summe von $8 - n$ Stammbrüchen für $n = 2, \dots, 6$.
- (e) Zeigen Sie, dass die Zahl $\frac{2}{m}$ für jede natürliche Zahl $m > 2$ als Summe zweier verschiedener Stammbrüche dargestellt werden kann.

Aufgabe 62 (2+2+3 Punkte). Es sei $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ die Menge der positiven rationalen Zahlen.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}_+$ eine Gruppe bezüglich der Multiplikation ist.
- (b) Beweisen Sie: Jedes $x \in \mathbb{Q}_+$ lässt sich eindeutig schreiben als Produkt

$$x = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$$

für Primzahlen $p_1 < \dots < p_k$ und ganze Zahlen $e_1, \dots, e_k \neq 0$ mit $k \geq 0$.

- (c) Zeigen Sie, dass eine abelsche Gruppe G genau dann abzählbar ist, wenn es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Q}_+ \rightarrow G$ gibt.

Hinweis: Nutzen Sie die Existenz einer surjektiven Abbildung von der Menge aller Primzahlen zu der G zugrunde liegenden Menge aus. (Insbesondere bedeutet „abzählbar“ hier „endlich oder abzählbar unendlich“.)

Abgabe: Donnerstag, 11.05.2017 um 14:00