

# Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke

Übungsblatt 2

**Aufgabe 57** (2+3 Punkte).

- (a) Zeigen Sie, dass eine ganze Zahl  $n$  genau dann als Summe dreier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen dargestellt werden kann, wenn  $3|n$ .
- (b) Formulieren und beweisen Sie eine allgemeine Regel für Summen von  $k$  aufeinanderfolgenden Zahlen.

**Aufgabe 58** (2+3+2 Punkte).

- (a) Sei  $p$  eine Primzahl und  $0 < k < p$ . Zeigen Sie, dass  $p \mid \binom{p}{k}$ . Folgern Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, dass für alle ganzen Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  gilt

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

- (b) Nutzen Sie (a), um per Induktion nach  $a \in \mathbb{N}$  zu beweisen:

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Folgern Sie, dass falls  $\text{ggT}(a, p) = 1$  ist, sogar  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  gilt.

- (c) Bestimmen Sie die Endziffer von  $7^{2017}$  (mit Begründung).

**Aufgabe 59** (2+2+2+2+2 Punkte). Sei  $R$  ein Ring. Wir nennen die Menge der invertierbaren Elemente (bzgl. der Multiplikation) die Einheitengruppe  $R^\times$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $R^\times$  eine Gruppe ist.
- (b) Beweisen Sie, dass  $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  ein Ring ist. (Hier ist  $i^2 = -1$ ).
- (c) Zeigen Sie:  $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$  ist genau dann eine Einheit, wenn  $\alpha$  auf dem Einheitskreis liegt. Folgern Sie, dass die Einheitengruppe  $\mathbb{Z}[i]^\times = \mu_4$  ist. (siehe Präsenzblatt 1 für die Definition von  $\mu_n$ ).
- (d) Sei  $p$  eine Primzahl. Konstruieren Sie einen Gruppenisomorphismus

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}.$$

*Hinweis:* Benutzen Sie Aufgabe 58 (b).

- (e) Geben Sie einen Ringhomomorphismus  $\mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  an, dessen Einschränkung auf die Einheitengruppen ein Gruppenisomorphismus ist.

*Hinweis:* Ein Ringhomomorphismus auf  $\mathbb{Z}[i]$  ist eindeutig durch seine Einschränkung auf die Einheitengruppe bestimmt. (Weshalb?)

**Abgabe:** Donnerstag, 04.05.2017 um 14:00