Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke Übungsblatt 11

Diese Wiederholungsaufgaben geben einen Überblick über die in der Vorlesung behandelten Themen.
Achten Sie bitte besonders auf eine klare Darlegung Ihrer Lösungen, etwa in der Formulierung Ihrer Beweismethoden, welche wie in der Klausur in die Bewertung einfließen wird!

Aufgabe 1 (6+6 Punkte)**.**

(a) Gegeben sei die folgende Wahrheitstafel.

X	Y	(A)
$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

Finden Sie eine Formel für (A), welche nur aus X, Y, $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ besteht.

(b) Welche der folgenden aussagenlogischen Terme sind Tautologien?

- $(X \wedge Y) \vee \neg X$
- $(X \to \neg Y) \vee \neg X$
- $(X \to \neg Y) \vee (\neg X \vee Y)$

Aufgabe 2 (4+6 Punkte)**.** Seien A und B Mengen.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen zueinander äquivalent sind.

(i) $A \subseteq B$,

(ii) $A \cup B = B$,

(iii) $A \cap B = A$,

(iv) $A \setminus B = \emptyset$.

(b) Beweisen Sie: Sind A und B endlich, so ist auch $A \times B$ endlich.

Aufgabe 3 (4+6+6+6 Punkte)**.**

(a) Seien $f\colon A \to B$ und $g\colon C \to B$ Abbildungen von Mengen, und

$$D = \{(a, c) \in A \times C \mid f(a) = g(c)\}.$$

Zeigen Sie: Ist g injektiv, so ist auch $j\colon D \to A$, $(a, c) \mapsto a$, injektiv.

(b) Sei $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \mapsto 2a$, und $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \mapsto 5a$. Berechnen Sie $j(D)$.

(c) Überprüfen Sie, ob folgende Abbildungen injektiv/surjektiv sind.

$$f\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2, \qquad g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2, \qquad h\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+,\ x \mapsto x^2.$$

(d) Sei $Z_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Geben Sie eine bijektive Abbildung $\mathbb{Z} \to Z_2[X]$ an.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$ die n-te Dreieckszahl. Beweisen Sie:

$$\Delta_n = \prod_{k=1}^{n-1} \Big(1 + \frac{1}{k}\Big)\Big(1 + \frac{1}{k+1}\Big).$$

Aufgabe 5 (6+6+4 Punkte)**.** Sei p eine Primzahl. Wir schreiben $\mathbb{Q}^{(p)}$ für die Menge der *gekürzten* Brüche $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ mit $\mathrm{ggT}(b,p) = 1$. Auf $\mathbb{Q}^{(p)}$ definieren wir die Relation $\frac{a}{b} \sim_p \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \equiv bc \bmod p$.

(a) Beweisen Sie, dass $\sim_p$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Q}^{(p)}$ definiert.

(b) Wir bezeichnen mit Z_p die Menge der Äquivalenzklassen. Zeigen Sie, dass Addition und Multiplikation rationaler Zahlen Z_p mit der Struktur eines Ringes ausstatten.

(c) Geben Sie einen Isomorphismus von Ringen $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to Z_p$ an.

Aufgabe 6 (4+4+4 Punkte)**.**

(a) Zeigen Sie, dass es keinen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ gibt.

(b) Gibt es einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/22\mathbb{Z}$?

(c) Finden Sie das Inverse zu 8 in $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$. Ist $\mathbb{Z}/33\mathbb{Z}$ ein Körper?

Aufgabe 7 (4+6 Punkte)**.**

(a) Sei R ein Ring, und $x \in R$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $R \to R$, $y \mapsto xy$, ein Homomorphismus der additiven Gruppe von R ist.

(b) Es gelte in R die Kürzungsregel: $xy = xz \Rightarrow y = z$ für alle $0 \neq x, y, z \in R$. Zeigen Sie: Falls R endlich ist, so ist R ein Körper.

Aufgabe 8 (6+6 Punkte)**.**

(a) Definiert die Abbildung $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ die Struktur einer Gruppe auf $\mathbb{C}$?

(b) Seien $x, y \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Halbgerade

$$\{(1-t)x + ty \mid t > 0\} \subseteq \mathbb{C}$$

die Struktur einer Gruppe erhält vermöge

$$((1-s)x + sy,\ (1-t)x + ty) \mapsto x - st(x-y).$$

Abgabe: Donnerstag, 20.07.2017 um 14:00