Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke Übungsblatt 10

Aufgabe 89 (3 Punkte). Sei $a \in \mathbb{R}$. Zerlegen Sie das Polynom

$$X^3 - aX^2 + \frac{a^2}{3}X - \frac{14a^3}{3}$$

sowohl in $\mathbb{R}[X]$ als auch in $\mathbb{C}[X]$ in irreduzible Faktoren.

Aufgabe 90 (3+2 Punkte). Sei K ein Körper, und $f = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X]$. Die formale Ableitung f' von f ist definiert als

$$f' = \sum_{k=0}^{n} k \cdot a_k X^{k-1} \in K[X].$$

(a) Sei nun $f = X^3 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$, und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von f'. Zeigen Sie, dass $f(\alpha)f(\beta) \in \mathbb{R}$ ist, und dass f genau dann drei reelle Nullstellen besitzt, wenn gilt

$$f(\alpha)f(\beta) < 0.$$

(b) Sei $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, und $f = \Phi_9$ das neunte Kreisteilungspolynom. Zerlegen Sie die formale Ableitung f' in $K[X]$ in irreduzible Faktoren.

Aufgabe 91 (3+3+2 Punkte). Wir betrachten die Kurve

$$E = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a^3 + 17 = b^2\}$$

in der komplexen Ebene.

(a) Überzeugen Sie sich, dass $x = 4+9i$ und $y = -2-3i$ auf E liegen. Berechnen Sie den verbleibenden Schnittpunkt von $[x, y]$ mit E.

Hinweis: Es bietet sich an, Aufgabe 85 (a) zu benutzen.

(b) Zeigen Sie, dass die Gerade durch $\overline{y}$ und $z = 8 + 23i$ die Kurve E nur in diesen beiden Punkten schneidet.

(c) Malen Sie ein Bild von E. Tragen Sie die Strecken $[x, y]$ und $[\overline{y}, z]$ darin ein.

Aufgabe 92 (2 Punkte). Seien $y, z \in \mathbb{C}$ mit $|y| = 1$. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\sigma\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ x \mapsto \overline{x}y + z,$$

beschreibt genau dann eine Geradenspiegelung, wenn $\frac{iz}{\sqrt{y}} \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 93 (4 Punkte)**.** Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ eine endliche Menge von Punkten, welche nicht allesamt auf einer Geraden liegen. Dann gibt es eine Gerade, auf der genau zwei Punkte aus S liegen. Beweisen Sie dies, indem Sie folgendes Argument hierfür ausformulieren, und erklären Sie es an einem Bild.

Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Geraden, die mindestens zwei Punkte aus S enthalten. Dann gibt es $x \in S$ und $L \in \mathcal{M}$ minimalen positiven Abstandes.
Angenommen L enthielte mehr als zwei Punkte aus S. Wir bezeichnen mit y die orthogonale Projektion von x auf L. Dann gibt es $x', x'' \in L \cap S$, welche auf derselben Seite von y liegen, und so dass x' näher an y liegt.
Sei schließlich L' die Gerade durch x und x''. Dann haben x' und L' einen kleineren Abstand als x und L.

Abgabe: Donnerstag, 13.07.2017 um 14:00