

Elemente der Mathematik - Sommer 2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Thomas Poguntke

Übungsblatt 1

Aufgabe 54 (4+2 Punkte). In der Vorlesung wurde die Multiplikation auf den ganzen Zahlen definiert durch

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(a', b')} = \overline{(a \cdot a' + b \cdot b', a \cdot b' + b \cdot a')}$$

für natürliche Zahlen $a, a', b, b' \in \mathbb{N}$.

- (a) Zeigen Sie, dass diese Operation wohldefiniert ist.
- (b) Gilt dies ebenfalls für den folgenden naiven Versuch einer Definition?

$$\overline{(a, b)} \odot \overline{(a', b')} = \overline{(a \cdot a', b \cdot b')}$$

Aufgabe 55 (2+2+3 Punkte). Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.

- (a) Für zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ schreiben wir

$$a \equiv b \pmod{n}$$

falls a und b denselben Rest bei der Division durch n haben. Zeigen Sie, dass dies äquivalent zu $n \mid (a - b)$ ist.

- (b) Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert.

Definition: Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von $a \in \mathbb{Z}$ mit

$$(a + n\mathbb{Z}) = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \pmod{n}\},$$

und die Menge der Äquivalenzklassen mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{(a + n\mathbb{Z}) \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

- (c) Beweisen Sie, dass jede Äquivalenzklasse genau ein a mit $0 \leq a < n$ enthält, und demnach die Abbildung

$$\{0, \dots, n-1\} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad a \longmapsto (a + n\mathbb{Z}),$$

bijektiv ist. Folgern Sie, dass die b -adische Darstellung eine Bijektion

$$\{(z_{k-1}, \dots, z_0) \in \{0, \dots, b-1\}^k \mid (z_{k-1}, \dots, z_0) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{Z}/(b^k - 1)\mathbb{Z}$$

liefert, für fest gewählte natürliche Zahlen $b \geq 2$ und $k \geq 1$.

Bemerkung: Für kleine n ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bereits aus der Vorlesung bekannt. Zum Fall $n = 1$ ist laut (c) nicht viel zu sagen. Die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist auf Präsenzblatt 12, Aufgabe 1, und sowohl im Kontext von Wahrheitswerten als auch der Binärzahlen aufgetaucht, und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ kennen Sie aus Aufgabe 53.

Aufgabe 56 (3+4+2 Punkte). Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.

- (a) Zeigen Sie, dass die Addition und Multiplikation $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit wohldefinierten Strukturen ausstatten, vermöge

$$(a + n\mathbb{Z}) + (b + n\mathbb{Z}) = (a + b + n\mathbb{Z})$$

$$(a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) = (a \cdot b + n\mathbb{Z})$$

Leiten Sie aus der bekannten Tatsache für $\mathbb{Z}$ ab, dass $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, (0 + n\mathbb{Z}))$ eine Gruppe ist.

Bemerkung: Diese wird die zyklische Gruppe (von Ordnung n) genannt.

- (b) Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen $d \in \mathbb{N}$, für welche die Abbildung

$$\rho: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, (a + n\mathbb{Z}) \longmapsto (a + d\mathbb{Z}),$$

wohldefiniert ist. In diesem Fall, zeigen Sie, dass ρ sowohl die additive als auch die multiplikative Struktur erhält, und bestimmen Sie die Kardinalität

$$|\rho^{-1}(\{0 + d\mathbb{Z}\})|.$$

- (c) Finden Sie die Lösungsmenge aller $a \in \mathbb{Z}$ für das Gleichungssystem

$$a \equiv 2 \pmod{9}$$

$$a \equiv 3 \pmod{7}$$

Hinweis: $4 \cdot 7 - 3 \cdot 9 = 1$.

Abgabe: Donnerstag, 27.04.2017 um 14:00