

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1. Finden Sie Funktionen f und g ungleich der Identität mit

- (a) $f \circ g \neq g \circ f$
- (b) $f \circ g = g \circ f$
- (c) $f \circ f = \text{id}$
- (d) $f \circ f = f$.

Aufgabe 2. Sei $f : M \rightarrow N$ eine Funktion.

- (a) Zeigen Sie $f^{-1}(X \setminus Y) = f^{-1}(X) \setminus f^{-1}(Y)$ für alle $X, Y \subseteq N$.
- (b) Gilt die Gleichheit $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$ für alle $X, Y \subseteq M$? Falls nicht, geben Sie an, für welche Funktionen f sie gilt.

Aufgabe 3. Seien $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$ Funktionen.

- (a) Sei $X \subseteq M$. Zeigen Sie $(g \circ f)(X) = g(f(X))$.
- (b) Sei $Z \subseteq P$. Zeigen Sie $(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$.

Aufgabe 4. Seien M, N nichtleere Mengen.

- (a) Zeigen Sie, dass es injektive Funktionen $M \rightarrow M \times N$ und $N \rightarrow M \times N$ gibt.
- (b) Zeigen Sie, dass es surjektive Funktionen $M \times N \rightarrow M$ und $M \times N \rightarrow N$ (sogenannte *Projektionen*) gibt.
- (c) Erklären Sie Ihre Lösung graphisch.
- (d) Wann sind die Funktionen von (a) und (b) bijektiv?