Präsenzaufgaben

Aufgabe 1. Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Sei p_n die n-te Primzahl und sei k so gewählt, dass in der Primfaktorzerlegung von a und b alle Primteiler in $\{p_0, \ldots, p_{k-1}\}$ liegen. Seien die Primfaktorzerlegungen von a und b gegeben durch

$$a = \prod_{i=0}^{k-1} p_i^{e(p_i)} \quad \text{und} \quad b = \prod_{i=0}^{k-1} p_i^{f(p_i)}.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) a ist eine Quadratzahl genau dann, wenn $e(p_i)$ gerade ist für jedes $i < k$.

(b) $a \mid b$ genau dann wenn, $e(p_i) \leq f(p_i)$ für jedes $i < k$.

Aufgabe 2. Das Sieb des Erasthotenes besagt, dass es reicht, um zu überprüfen ob $a \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist, zu testen, ob alle Zahlen $\leq \lceil \sqrt{a} \rceil$ Teiler sind. Erläutern Sie, wieso dies reicht und finden Sie alle Primzahlen ≤ 100.

Aufgabe 3. Für welche $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{kgV}(a, b)$?

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$ keine Primzahl und p der kleinste Primfaktor von n. Ist $p^3 > n$, so ist $\frac{n}{p}$ eine Primzahl.