Wiederholungsaufgaben

Die Wiederholungsaufgaben geben einen Überblick über alle bisher behandelten Themen in der Vorlesung *Elemente der Mathematik*. Die Abgabe der Wiederholungsaufgaben ist freiwillig, wird jedoch allen sehr empfohlen. Die Wiederholungsaufgaben müssen EINZELN abgegeben werden. Wer alle Aufgaben bearbeitet hat und insgesamt die Hälfte der möglichen Punkte erreicht, erhält 12 BONUSPUNKTE, die zusätzlich für die Zulassung zählen.

Schöne Weihnachten!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie eine Formel für $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \cdot k$ und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

Lösung. Sei $S(n) := \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \cdot k$. Wir sehen, dass $s(1) = -1, s(2) = 1, s(3) = -2, s(4) = 2\ldots$ Wir behaupten also, dass

$$S(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade,} \\ \frac{-(n+1)}{2} & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

- *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ gilt $S(1) = \sum_{k=1}^{1}(-1)^k \cdot k = -1 = \frac{-(1+1)}{2}$.
- *Induktionsannahme:* Wir nehmen an, dass $S(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade,} \\ \frac{-(n+1)}{2} & n \text{ ungerade.} \end{cases}$.

  Induktionsschritt: Wir machen eine Fallunterscheidung:

1. Fall: n gerade und somit $n+1$ ungerade. Dann gilt $S(n) = \frac{n}{2}$ und somit

$$\begin{aligned} S(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k \cdot k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \cdot k + (-1)^{n+1} \cdot (n+1) \\ &= \frac{n}{2} - (n+1) = \frac{n-2n-2}{2} = \frac{-(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

2. Fall: n ungerade und somit $n+1$ gerade. Dann gilt $S(n) = \frac{-(n+1)}{2}$ und somit

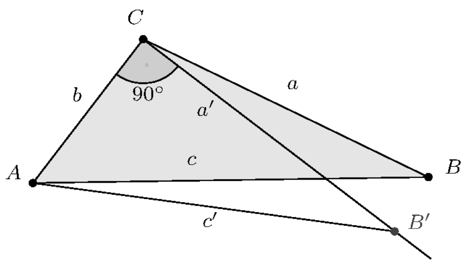
$$S(n+1) = \frac{-(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{-n-1+2n+2}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

In beiden Fällen haben wir gezeigt, dass die Behauptung auch für $n+1$ gilt.

Aufgabe 2. Beweisen Sie mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion, dass die Summe der Innenwinkel eines n-Ecks gleich $(n-2)\pi$ ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Gegeben sei ein Dreieck mit Seiten a, b und c. Beweisen Sie per Widerspruchsbeweis oder Kontrapositionsbeweis die Umkehrung des Satzes von Pythagoras, d.h. falls $a^2+b^2=c^2$, so ist der Winkel zwischen a und b ein rechter Winkel.[1]

Lösung. Sei ΔABC ein Dreieck mit Seiten a, b und c mit $a^2+b^2=c^2$. Wir nehmen per Widerspruch an, dass der Winkel γ bei C kein rechter Winkel ist. Wir ändern das Dreieck, indem wir bei C einen rechten Winkel an b ansetzen und dann eine Strecke der Länge a abtragen.



Dadurch erhalten wir ein rechtwinkliges Dreieck $\Delta AB'C$ mit Seiten a', b und c' und der Eigenschaft $a=a'$. Aus dem Satz des Pythagoras folgt $(a')^2+b^2=(c')^2$, also wegen $a=a'$ auch $c^2=(c')^2$. Daraus folgt $c=c'$. Nun haben die zwei Dreiecke exakt gleich lange Seiten und dadurch sind auch alle Winkel bestimmt. Insbesondere müssen die Dreiecke gleich sein, ein Widerspruch.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie oder finden Sie ein Gegenbeispiel:

(a) $A \cup (B \triangle C) = (A \cup B) \triangle (A \cup C)$

(b) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Lösung. (a) Die Gleichheit gilt im Allgemeinen nicht, da für $B=C=\emptyset$ gilt $A \cup (B \triangle C) = A \cup \emptyset = A$ und $(A \cup B) \triangle (A \cup C) = A \triangle A = \emptyset$; falls $A \neq \emptyset$, so ist dann die Gleichheit falsch.

[1]Sie dürfen dazu alles verwenden, was in im Geometrieunterricht in der Schule behandelt worden ist.

(b) Wir zeigen, dass die Gleichheit stimmt.

"$\subseteq$" Sei $x \in A \cap (B \triangle C)$. Dann gilt $x \in A$ und $x \in B \triangle C$, also $x \in B \setminus C \cup C \setminus B$. Es gibt also zwei Fälle:

1. Fall: $x \in B \setminus C$. Dann ist $x \in B$ und $x \notin C$, also $x \in A \cap B$ und $x \notin A \cap C$. Daraus folgt $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ und somit $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

2. Fall: $x \in C \setminus B$. Dieser Fall ist gleich wie der vorherige (mit B und C vertauscht).

"$\supseteq$" Sei $x \in (A \cap B) \triangle (A \cap C) = ((A \cap B) \setminus (A \cap C)) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B))$. Wir haben wieder 2 Fälle:

1. Fall: $x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. Dann gilt $x \in A$ und $x \in B$ sowie $x \notin A \cap C$. Da $x \notin A \cap C$ ist, gilt entweder $x \notin A$ oder $x \notin C$. Da $x \in A$ gilt, folgt $x \notin C$. Damit ist $x \in B \setminus C$, also $x \in B \triangle C$. Insgesamt folgt also $x \in A \cap (B \triangle C)$.

2. Fall: $x \in (A \cap C) \setminus (A \cap B)$. Dieser Fall ist gleich wie der este (mit B und C vertauscht).

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei $f : M \to N$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f^{-1}(f(X)) = X$ für alle $X \subseteq M$ gilt.

Lösung.

"$\Rightarrow$" Sei f injektiv. Wir müssen zwei Inklusionen zeigen.

"$\subseteq$" Sei $x \in f^{-1}(f(X))$. Dann gilt $f(x) \in f(X)$, und somit gibt es ein $x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$. Da aber f injektiv ist, folgt $x = x' \in X$.

"$\supseteq$" Sei $x \in X$. Dann gilt $f(x) \in f(X)$. Also ist $x \in f^{-1}(f(X))$.

"$\Leftarrow$" Wir machen einen Kontrapositionsbeweis. Wir nehmen also an, dass f nicht injektiv ist. Dann gibt es $x \neq x'$ in X mit $f(x) = f(x')$. Sei nun $X := \{x\}$. Dann gilt $f(x') = f(x) \in f(X)$, also folgt $x' \in f^{-1}(f(X))$. Daher gilt $X = \{x\} \subsetneq \{x, x'\} \subseteq f^{-1}(f(X))$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Für eine Menge I (genannt *Indexmenge*) und Mengen A_i (für $i \in I$) definieren wir

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}.$$

(a) Verwenden Sie das Induktionsprinzip für endliche Mengen um zu zeigen, dass falls I endlich ist, und A_i endlich ist für jedes $i \in I$, dann ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ endlich.

(b) Seien I und J Indexmengen. Gilt die Gleichheit

$$\bigcup_{i\in I\cap J} A_i = \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big)?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung. (a) Wir machen Induktion über die endliche Menge I bzgl. der Formel $\varphi(I)$ gegeben durch "$\bigcup_{i\in I} A_i$ ist endlich".

- *Induktionsanfang:* Falls $I = \emptyset$, so ist $\bigcup_{i\in I} A_i = \emptyset$ endlich.
- *Induktionsschritt:* Wir nehmen an, dass $\varphi(I)$ gilt. Sei nun $J := I \cup \{j\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \bigcup_{i\in J} A_i &= \{x \mid \exists i \in J : x \in A_i\} \\ &= \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i \vee x \in A_j\} \\ &= \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\} \cup A_j \\ &= \Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cup A_j. \end{aligned}$$

  Da nach Annahme $\bigcup_{i\in I} A_i$ und A_j endlich sind, ist auch $\bigcup_{i\in J} A_i$ als Vereinigung endlicher Mengen endlich.
- Die Gleichheit gilt nicht, denn z.B. falls $I = \{0\}, J = \{1\}$ und $A_0 = A_1 = \{2\}$, so gilt $\bigcup_{i\in I\cap J} A_i = \bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \emptyset$, aber $\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big) = A_0 \cap A_1 = \{2\}$.

Aufgabe 7 (3 Punkte)**.** Wir definieren eine aussagenlogische Operation $\uparrow$ durch die Wahrheitstafel

X	Y	$X \uparrow Y$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$

Zeigen Sie, dass man alle aussagenlogischen Operationen alleine durch $\uparrow$ ausdrücken kann.

Lösung. Wir zeigen zuerst, dass $X \uparrow Y = \neg X \wedge \neg Y$ durch einen Vergleich der entsprechenden Wahrheitstafeln:.

X	Y	$X \uparrow Y$	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg X \wedge \neg Y$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$

Nun gilt

$$\neg X = \neg X \wedge \neg X = X \uparrow X$$
$$X \wedge Y = \neg(\neg X) \wedge \neg(\neg Y) = \neg(X \uparrow X) \wedge \neg(Y \uparrow Y) = (X \uparrow X) \uparrow (Y \uparrow Y).$$

Dies reicht, da wir schon in einer Übung gezeigt haben, dass sich $\vee$ und $\rightarrow$ durch die Operationen $\neg$ und $\wedge$ ausdrücken lassen.

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Welche der folgenden Funktionen sind injektiv/surjektiv/bijektiv?

(a) $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], p \mapsto p'$, wobei $\mathbb{R}[x]$ die Menge aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ und einer Unbekannten x ist, und f die Ableitungsfunktion.[2]

(b) $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, x \mapsto x \cdot |x|$, wobei

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

Lösung. (a) f ist nicht injektiv, da alle konstanten Polynome dieselbe Ableitung 0 haben. Andrerseits ist f surjektiv, da man jedes Polynom integrieren kann: Für $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ sei

$$q := \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \cdots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x.$$

Dann gilt $f(q) = q' = p$.

(b) g ist injektiv: Seien $x, x' \in \mathbb{Q}$ mit $g(x) = g(x')$. Dann gilt $x \cdot |x| = x' \cdot |x'|$. Somit müssen x und x' dasselbe Vorzeichen haben.

1. Fall: $x, x' \geq 0$. Dann gilt $x^2 = x \cdot |x| = x' \cdot |x'| = (x')^2$. Da $x, x' \geq 0$ folgt $x = x'$.

2. Fall: $x, x' < 0$. Dann gilt $-x^2 = x \cdot |x| = x' \cdot |x'| = -(x')^2$. Wie vorher folgt $x = x'$.

Andrerseits ist g nicht surjektiv, da es kein $x \in \mathbb{Q}$ gibt mit $g(x) = 2$, denn ein solchex x würde $x^2 = 2$ erfüllen.

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** Welche der folgenden aussagenlogischen Terme sind Tautologien? Begründen Sie Ihre Antwort.

[2] Ein Polynom hat die Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$ für $0 \leq i \leq n$.

(a) $Y \wedge (\neg X \to \neg Y) \to X$
(b) $Y \to (Z \to X) \vee \neg X$.

Lösung. (a) Wir haben bereits in den Übungen gezeigt, dass $Y \to X = \neg X \to \neg Y$ gilt (Kontraposition). Wir betrachten die Wahrheitstafel von $Y \wedge (Y \to X) \to X$:

X	Y	$Y \to X$	$Y \wedge (Y \to X)$	$Y \wedge (Y \to X) \to X$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$

Da in der letzten Spalte alle Wahrheitswerte $\mathbb{W}$ sind, handelt es sich um eine Tautologie.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} Y \to (Z \to X) \vee \neg X &= (\neg Y \vee (Z \to X)) \vee \neg X \\ &= (\neg Y \vee (\neg Z \vee X)) \vee \neg X \\ &= \neg Y \vee ((\neg Z \vee X) \vee \neg X) \\ &= \neg Y \vee (\neg Z \vee (X \vee \neg X)). \end{aligned}$$

Da $X \vee \neg X$ eine Tautologie ist, und die Disjunktion mit einer Tautologie wieder eine Tautologie ist, handelt es sich um eine Tautologie.

Aufgabe 10 (3 Punkte)**.** Seien M und N Mengen und $f : M \to N$ bijektiv. Geben Sie eine bijektive Funktion von $\mathcal{P}(M)$ nach $\mathcal{P}(N)$ an.

Aufgabe 11 (4 Punkte)**.** Wählen Sie jeweils die richtige Antwort.[3]

richtig	falsch	
☒	☐	Die Funktion $\mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M), X \to M \setminus X$ ist bijektiv.
☒	☐	Falls S und T dieselbe Wahrheitstafel besitzen, so haben auch $S \vee T$ und $S \wedge T$ dieselbe Wahrheitstafel.
☐	☒	"7 ist gerade" ist hinreichend, aber nicht notwendig für "$1 = 2$".
☐	☒	Falls $\{a, \{b\}\} = \{c, \{d\}\}$, so gilt $a = c$ und $b = d$.

[3]Falsche Antworten geben Abzug. Eine negative Punktezahl ist jedoch nicht möglich.

Neue Aufgaben

Dies sind die regulären Aufgaben vom Blatt 9.

Aufgabe 39 (3 Punkte, Prüfungsaufgabe SoSe 2016)**.** Zeigen Sie die Gleichheit

$$1010\ldots1010_2 = \frac{2(4^n-1)}{3},$$

wobei die Ziffergruppe 10 im Binärystem genau n-mal hintereinander steht.

Lösung. Wir beweisen die Behauptung per Induktion über n.

- *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ ist

$$10_2 = 2 = \frac{2(4^1-1)}{3}.$$

- *Induktionsannahme:* Wir nehmen an, die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

  Induktionsschritt: Es gilt

$$\begin{aligned}
\underbrace{10\ldots10_2}_{(n+1)\text{-mal}} &= 2^{2(n+1)-1} + \underbrace{10\ldots10_2}_{n\text{-mal}} \\
&= 2^{2n+1} + \frac{2(4^n-1)}{3} \\
&= \frac{3\cdot 2\cdot 4^n + 2(4^n-1)}{3} \\
&= \frac{2(3\cdot 4^n + 4^n - 1)}{3} \\
&= \frac{2(4^{n+1}-1)}{3}
\end{aligned}$$

  was zu beweisen war.

Aufgabe 40 (5 Punkte)**.** Berechnen Sie

(a) die 7-adische Darstellung von 4972.

(b) $13431_5 + 42344_5$ und $123_5 \cdot 234_5$ im 5er-System.

(c) die 3-adische und die 27-adische Darstellung von 5420368_9, ohne die Zahl ins 10er-System umzuschreiben.

Lösung. (a) Es gilt $7^2 = 49, 7^3 = 343, 7^4 = 2401$. Wir haben also

$$\begin{aligned}4972 &= 2 \cdot 7^4 + 170\\ &= 2 \cdot 7^4 + 0 \cdot 7^3 + 170\\ &= 2 \cdot 7^4 + 0 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 23\\ &= 2 \cdot 7^4 + 0 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^1 + 2\\ &= 2 \cdot 7^4 + 0 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0.\end{aligned}$$

Also gilt $4972 = 20332_7$.

(b) Wir rechnen direkt im 5er-System:

$$\begin{array}{rr} & 13431\\ + & 42344\\ & {\scriptstyle 1\,1\,1\,1}\\ \hline & 111330\end{array}$$

und

$$\begin{array}{rr} \multicolumn{2}{r}{123 \cdot 234}\\ \hline & 1312\\ + & 1023\\ + & 234\\ \hline & 40442\end{array}$$

d.h. die Resultate sind 111330_5 und 40442_5.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}5420368_9 &= 5 \cdot 9^6 + 4 \cdot 9^5 + 2 \cdot 9^4 + 3 \cdot 9^2 + 6 \cdot 9 + 8\\ &= (3+2) \cdot 3^{12} + (3+1) \cdot 3^{10} + 2 \cdot 3^8 + 3 \cdot 3^4 + (2 \cdot 3) \cdot 3^2 + (2 \cdot 3 + 2)\\ &= 3^{13} + 2 \cdot 3^{12} + 3^{11} + 3^{10} + 2 \cdot 3^8 + 3^5 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0\\ &= 12110200102022_3\end{aligned}$$

Etwas einfacher: jede Ziffer n im 9er-System wird zu 2 Ziffern im 3er-System: $8_9 = 22_3, 6_9 = 20_3$ und somit $68_9 = 2022_3$ usw. Wenn wir vom 3er-System zum 27er-System (= 3^3-System) umrechnen, fassen wir 3 Ziffern im 3er-System zu einer Ziffer im 27er-System zusammen. Es gilt also:

$$12110200102022_3 = 5(12)(18)(11)8_{27}.$$

Aufgabe 41 (10 Punkte)**.** Ähnlich wie die b-adische Darstellung einer natürlichen Zahl führen wir die Darstellung im Faktoriellensystem ein. Wir definieren $0! := 1$

und

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Für natürliche Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}$) sei

$$a_n \dots a_{1!} := a_n \cdot n! + a_{n-1} \cdot (n-1)! + \dots + a_2 \cdot 2! + a_1 \cdot 1!.$$

(a) Berechnen Sie

$$531311_! + 420120_!$$

und stellen Sie das Ergebnis im !-System dar.

(b) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! < (n+1)!.$$

(c) Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl eine eindeutige Darstellung im Faktoriellensystem besitzt.

(d) Welche Vor- oder Nachteile könnte das Faktoriellensystem im Vergleich mit den b-adischen Systemen haben?

Lösung. (a) Es gilt

$$\begin{array}{rr} & 531311 \\ + & 420120 \\ & {\scriptstyle 1\ \ \ 1\,1\ \ \ } \\ \hline & 1252101 \end{array}$$

Der Übertrag funktioniert wie folgt: An der Stelle k sind alle Zahlen zwischen 0 und k erlaubt; wenn die Summe der beiden Zahlen an der k. Stelle $k+1+l$ ergibt mit $0 \leq l < k$ (falls die Summe $\leq k$ ist, so gibt es keinen Übertrag), so gilt $(k+l+1) \cdot k! = (k+1) \cdot k! + l \cdot k!$, also ist der Übertrag 1 und an der Stelle k bleibt dann l übrig.

Alternativ kann man die Summe auch direkt ausrechnen:

$$\begin{aligned}531311_! + 420120_! &= (5 \cdot 6! + 3 \cdot 5! + 1 \cdot 4! + 3 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 1 \cdot 1!) \\ &\quad + (4 \cdot 6! + 2 \cdot 5! + 1 \cdot 3! + 2 \cdot 2!) \\ &= 9 \cdot 6! + 5 \cdot 5! + 1 \cdot 4! + 4 \cdot 3! + 3 \cdot 2! + 1 \cdot 1! \\ &= 9 \cdot 6! + 5 \cdot 5! + 1 \cdot 4! + 4 \cdot 3! + 3! + 1 \cdot 1! \\ &= 9 \cdot 6! + 5 \cdot 5! + 1 \cdot 4! + (4+1) \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 1 \cdot 1! \\ &= 9 \cdot 6! + 5 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 1 \cdot 1! \\ &= (7+2) \cdot 6! + 5 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 1 \cdot 1! \\ &= 1 \cdot 7! + 2 \cdot 6! + 5 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 1 \cdot 1! \\ &= 1252101_!\end{aligned}$$

(b)
- *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1 < 2 = 2!$.
- *Induktionsannahme:* Wir nehmen an, dass $\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! < (n+1)!$ für ein beliebiges fest gewähltes $n \geq 1$.

  Induktionsschluss: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &< (n+1)! + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (1 + n + 1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+2) \cdot (n+1)! \\ &= (n+2)!\end{aligned}$$

  wie gewünscht.

(c) Wir müssen zeigen, dass jede natürliche Zahl eine Darstellung im Faktoriellensystem hat, und dass diese Darstellung eindeutig ist.

- *Existenz:* Sei $a \in \mathbb{N}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ maximal, s.d. $n!$ ein Teiler von a ist. Nach dem Satz über Division mit Rest gibt es dann $a_n \leq n$ und $r_n < n!$ mit

$$a = a_n \cdot n! + r_n.$$

  Iterativ definieren wir per Division mit Rest a_k, r_k für $k = n, \ldots, 1$ mit

$$r_{k+1} = a_k \cdot k! + r_k,$$

  wobei $a_k \leq k$ und $r_k < k!$ (und $r_{k+1} := a$). Wir erhalten jeweils $a_k \leq k$, da $r_{k+1} < (k+1)! = (k+1) \cdot k!$. Nach Konstruktion gilt $a = a_n \ldots a_{1!}$.

- *Eindeutigkeit:* Wir nehmen an, dass $a_n \dots a_{1!} = b_m \dots b_{1!}$ mit $a_k, b_k \leq k$. Wir können $n = m$ wählen, da wir die kürzere Zahl durch zusätzliche Nullen verlängern können. Sei $k \leq n$ die maximale Zahl mit $a_k \neq b_k$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $a_k < b_k$. Dann gilt aber $\sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot i! \leq \sum_{i=0}^{k-1} i \cdot i! < k!$, also $a_k \dots a_{1!} = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot i! = a_k \cdot k! + \sum_{i=0}^{k-1} a_i \cdot i! < a_k \cdot k! + k! = (a_k + 1) \cdot k! \leq b_k \cdot k! \leq \sum_{i=0}^{k} b_k \cdot k! = b_k \dots b_{1!}$, ein Widerspruch.

(d) Ein Vorteil des Faktoriellensystems liegt darin, dass man eine wesentlich kürzere Darstellung von grossen Zahlen erhält, da $k!$ viel schneller wächst als b^k für eine beliebige Basis b. Ein Nachteil ist beispielsweise, dass die Umrechnung in die verschiedenen Zahlensysteme wesentlich komplizierter ist und dass das Rechnen etwas komplizierter ist.[4]

Abgabe: Donnerstag, 12.01.2017 um 14:00

[4]Bei dieser Aufgabe gibt es verschiedene Antwortmöglichkeiten.