Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf — Übungsblatt 8

Aufgabe 33 (6 Punkte)**.** Beweisen Sie folgende Identitäten durch vollständige Induktion:

(a) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$.
(b) $\prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}, n \geq 2$.

Lösung. (a)

- *Induktionsanfang:* Für $n = 0$ gilt $0^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}$.
- *Induktionsannahme:* Wir nehmen an, dass $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für ein beliebiges fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

  Induktionsschluss: Es gilt

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.
\end{aligned}
$$

  Damit haben wir gezeigt, dass $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b)

- *Induktionsanfang:* Für $n = 2$ gilt $1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2\cdot 2}$.
- *Induktionsannahme:* Wir nehmen an, dass die Gleichheit $\prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$ für ein beliebiges, aber fest gewähltes $n \geq 2$ gilt.

Induktionsschluss: Es gilt

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n+1}(1-\frac{1}{k^2}) &= \prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})\cdot(1-\frac{1}{(n+1)^2})\\ &= \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\\ &= \frac{n^2+2n}{2n(n+1)}\\ &= \frac{n(n+2)}{2n(n+1)}\\ &= \frac{n+2}{2(n+1)}.\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$ für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt.

Aufgabe 34 (2 Punkte)**.** Einem Bonner Mathematikstudenten ist es endlich gelungen, die erste These der Julirevolution (“Alle Menschen sind gleich”) wissenschaftlich zu beweisen. Ist nämlich M eine Menge mit endlich vielen Elementen, so gilt $a = b$ für $a, b \in M$.

Beweis durch Induktion:

- *Induktionsanfang:* Hat M genau ein Element, $M = \{a\}$, so ist die Aussage richtig.
- *Induktionsannahme* (IA): Die Aussage sei richtig für alle Mengen mit genau n Elementen.

  Induktionsschluss: Es sei M' eine Menge mit genau $n+1$ Elementen. Für $b \in M'$ sei $N := M' \setminus \{b\}$. Die Elemente von N sind nach (IA) einander gleich. Es bleibt zu zeigen: $b = c$, wenn $c \in M'$. Dazu entfernt man ein anderes Element d aus M' und weiss dann: $b \in M' \setminus \{d\}$. Die Elemente dieser Menge sind nach (IA) wiederum einander gleich. Wegen der Transitivität der Gleichheitsbeziehung folgt dann die Behauptung. (Transitivität: $a = b$ und $b = c$ implizieren $a = c$)

Was ist falsch an diesem Schluss?

Lösung. Das Problem liegt im Induktionsschluss für 2-elementige Mengen. Ist nämlich $M' = \{b, d\}$, so haben wir $(M' \setminus \{b\}) \cap (M' \setminus \{d\}) = \emptyset$. Dann aber lässt sich die Transitivität der Gleichheit nicht mehr anwenden.

Aufgabe 35 (3 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass die Ebene $\mathbb{R}^2$, die durch endlich viele Geraden geteilt wird, mit zwei Farben so eingefärbt werden kann, dass je zwei benachbarte Teile (d.h. mit einer gemeinsamen Kante) nie von der gleichen Farbe sind.

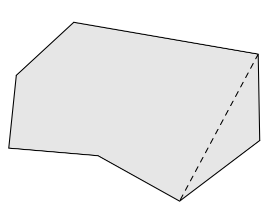
Lösung. Induktionsanfang: Sei $n = 0$. Dann kann man die Ebene mit einer einzigen Farbe färben. (Alternativ kann man mit $n = 1$ anfangen, dann teilt die Gerade die Ebene in zwei Teile; davon färbt man einen mit der einen Farbe und den anderen mit der anderen Farbe.)
Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass eine durch n Geraden geteilte Ebene mit zwei Farben eingefärbt werden kann.
Induktionsschluss: Wir wollen zeigen, dass die Aussage auch fr $n+1$ richtig ist. Wenn wir $n+1$ Geraden haben, wählen wir eine beliebige Gerade g aus. Die Flächen, die durch die übrigen n Geraden entstehen, können wir gemäss der Induktionsannahme mit zwei Farben färben. Die Gerade g teilt die Ebene in zwei Hälften H_1 und H_2. Auf der Seite H_1 lassen wir die Färbung. Auf der Seite H_2 färben wir alle Flächen um. Dadurch entsteht eine Färbung der durch $n+1$ Geraden geteilten Ebene mit zwei Farben.

Aufgabe 36 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Summe der Innenwinkel eines n-Ecks, und beweisen Sie Ihre Formel mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion.

Lösung. Wir behaupten, dass die Innenwinkelsumme in einem n-Eck (für $n \geq 3$) $(n-2) \cdot \pi = (n-2) \cdot 180°$ beträgt.

- *Induktionsanfang:* Falls $n = 3$, so ist die Innenwinkelsumme eines Dreiecks $\pi = (3-2)\pi$.
- *Induktionsannahme:* Wir nehmen an, dass die Innenwinkelsumme eines beliebigen n-Ecks ($n \geq 3$) $(n-2)\pi$ beträgt.

  Induktionsschluss: Sei nun ein $(n+1)$-Eck gegeben. Wir betrachten zunčhst das n-Eck, welches entsteht, wenn aus $(n+1)$-Eck eine Ecke übersprungen wird, d.h. wir verbinden zwei Ecken, zwischen denen genau eine Ecke liegt.



Dadurch wird das $(n+1)$-Eck in ein n-Eck und ein Dreieck geteilt, und die Winkelinnnensumme des $(n+1)$-Ecks ist gleich der Winkelinnensumme des n-Ecks plus der Winkelinnensumme des Dreiecks, also (unter Verwendung der Induktionsannahme) $(n-2)\pi + \pi = (n-1)\pi = ((n+1)-2)\pi$.

Aufgabe 37 (6 Punkte)**.** Wir definieren $0! := 1$ und für $n \geq 1$

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots n.$$

Weiter definieren wir die *Binomialkoeffizienten* durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!}, n \geq k.$$

(a) Erklären Sie informell, wieso $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ ist.
(b) Begründen Sie die Formel $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ mit Hilfe von (a).
(c) Beweisen Sie die Formel in (b) mit Hilfe von vollständiger Induktion.
Hinweis: Beweisen Sie zuerst die Gleichheit $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Lösung. (a) Es gibt $n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)$ Möglichkeiten ein geordnetes k-Tupel aus $\{1, \ldots, n\}$ auszuwählen. Da für uns aber die Reihenfolge keine Rolle spielt, dividieren wir durch die Anzahl aller Permutationen (Vertauschungen) der Elemente des k-Tupels. Diese ist $k!$, denn für die man hat k Möglichkeiten für das 1. Element, $k-1$ Möglichkeiten für das 2. Element,... und 1 Möglichkeit für das k-te Element, also insgesamt $k \cdot (k-1) \cdot, \ldots, \cdot 1 = k!$.

(b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ist die Anzahl aller 0-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ + die Anzahl aller 1-elementigen Teilmengen +... + die Anzahl aller n-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots\}$. Insgesamt ist $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ also die Anzahl aller Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$, also $|\mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}) = 2^n$ (siehe Aufgabe 29 (c)).

(c) Wir beweisen die Aussage mittels Induktion über n.
Induktionsanfang: Sei $n = 0$. Dann ist $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0 = 2^n$ Also stimmt die Aussage fr $n = 0$.
Induktionsannahme: Wir nehmen an, die Aussage sei richtig fr ein beliebiges, aber fest gewhltes n.
Induktionsschluss: Wir wollen zeigen, dass die Aussage auch fr $(n+1)$ richtig

ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] + 2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} + 1,
\end{aligned}$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen den Hinweis verwendet haben und beim dritten Gleichheitszeichen, dass $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j}$ ist. Mit der Induktionsannahme (wir wenden sie zweimal an) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= 2^n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} + 1 \\
&= 2^n + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} - \binom{n}{n} + 1 \\
&= 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

Wir beweisen noch den Hinweis:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{k \cdot n! + (n-k+1) \cdot n!}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(k+n-k+1)n!}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$