Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf Lösungen Übungsblatt 7

Aufgabe 29 (8 Punkte)**.** Für eine Menge M ist die *Potenzmenge* von M definiert als

$$\mathcal{P}(M) := \{X \mid X \subseteq M\},$$

also die Menge aller Teilmengen von M.

(a) Berechnen Sie $\mathcal{P}(\emptyset), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ sowie $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$.

(b) Beweisen Sie, dass die Potenzmenge einer endlichen Menge ebenfalls eine endliche Menge ist.

(c) Sei $|M| = \mu$. Berechnen Sie die Kardinalität von $\mathcal{P}(M)$.

(d) Sei $f : M \to \mathcal{P}(M)$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass f nicht surjektiv ist. Betrachten Sie dazu die Menge $X := \{x \in M \mid x \notin f(x)\}$.

(e) Folgern Sie, dass es für jede Kardinalzahl μ eine Kardinalzahl ν gibt mit $\nu > \mu$.

Bemerkung: Aus (e) folgt, dass es eine Kardinalzahl grösser als $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ gibt. Beispielsweise ist die Kardinalität von $\mathbb{R}$ grösser als $\aleph_0$.

Lösung. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\emptyset) &= \{\emptyset\} \\
\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) &= \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) &= \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))) &= \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}) \\
&= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\
&\quad \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \\
&\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}.
\end{aligned}$$

(b) Sei $\varphi(x)$ die Eigenschaft "$\mathcal{P}(x)$ ist endlich".

- *Induktionsanfang:* $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ist endlich, also gilt $\varphi(\emptyset)$.
- *Induktionsschritt:* Wir nehmen an, dass $\varphi(x)$ gilt. Wir müssen zeigen, dass $\varphi(x \cup \{y\})$ für ein beliebiges y gilt. Nach Annahme ist $\mathcal{P}(x)$ endlich. Es gilt

$$\mathcal{P}(x \cup \{y\}) = \mathcal{P}(x) \cup \{z \cup \{y\} \mid z \in \mathcal{P}(x)\}.$$

Nach Annahme ist $\mathcal{P}(x)$ endlich. Es bleibt zu zeigen, dass $M := \{z \cup \{y\} \mid z \in \mathcal{P}(x)\}$ auch endlich ist. Es gilt:

$$f : \mathcal{P}(x) \to M, f(z) := z \cup \{y\}$$

ist bijektiv. Daher ist auch M endlich. Da Vereinigungen von endlichen Mengen wieder endlich sind, ist $\mathcal{P}(x \cup \{y\})$ ebenfalls endlich.

(c) Wir behaupten, dass $|\mathcal{P}(M)| = 2^\mu$ gilt. Dazu reicht es, eine Bijektion zwischen $\mathcal{P}(M)$ und $\{0,1\}^M$ anzugeben, da $|\{0,1\}| = 2$ und $|M| = \mu$ und somit $|\{0,1\}^M| = 2^\mu$. Wir betrachten

$$f : \{0,1\}^M \to, \mathcal{P}(M), s \mapsto f(s) := \{x \in M \mid s(x) = 1\}.$$

Wir zeigen, dass f bijektiv ist.

- *f ist injektiv:* Seien $s, t \in \{0,1\}^M$ mit $f(s) = f(t)$. Für $x \in M$ gilt

$$s(x) = 1 \iff x \in f(s) = f(t) \iff t(x) = 1$$

und somit $s(x) = t(x)$. Aus dem Extensionalitätsaxiom für Funktionen folgt $s = t$.

- *f ist surjektiv:* Sei $N \in \mathcal{P}(M)$. Wir definieren

$$s : M \to \{0,1\}, s(x) = \begin{cases} 1 & x \in N \\ 0 & x \notin N. \end{cases}$$

Dann gilt $f(s) = \{x \in M \mid f(x) = 1\} = N$ wie gewünscht.

(d) Wir machen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass f surjektiv ist. Dann ist $X = \{x \in M \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(M)$. Somit gibt es ein $y \in M$ mit $f(y) = X$. Dann gilt aber

$$y \in f(y) \iff y \in X \iff y \notin f(y),$$

ein Widerspruch.

(e) Sei M eine Menge mit $|M| = \mu$. Wir definieren $\nu := |\mathcal{P}(M)| = 2^\mu$. Es gilt $\mu \leq \nu$, da die Funktion $M \to \mathcal{P}(M), x \mapsto \{x\}$ offensichtlich injektiv ist. Aus (d) folgt aber, dass es keine surjektive (und somit auch keine bijektive) Funktion $M \to \mathcal{P}(M)$ gibt. Daraus folgt $\mu < \nu$.

Aufgabe 30 (6 Punkte)**.** Sei M eine endliche Menge und $f : M \to M$ eine Funktion.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe eines Induktionsargumentes, dass falls f injektiv oder surjektiv ist, f bereits bijektiv ist.

(b) Sei f bijektiv. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-mal}} = \mathrm{id}_M.$$

(c) Gelten (a) und (b) auch falls M unendlich ist?

Hinweis für (b): Verwenden Sie Präsenzaufgabe 1.

Lösung. (a) Wir zeigen die Behauptung per Induktion. Sei $\varphi(x)$ die Eigenschaft "jede injektive oder surjektive Abbildung $x \to x$ ist bijektiv".

- *Induktionsanfang:* Die einzige Funktion $\emptyset \to \emptyset$ ist die leere Funktion, und die ist bereits bijektiv. Somit gilt $\varphi(\emptyset)$.
- *Induktionsschritt:* Wir nehmen an, dass $\varphi(x)$ gilt. Sei $f : x \cup \{y\} \to x \cup \{y\}$ eine Funktion, die entweder injektiv oder surjektiv ist. Wir müssen zeigen, dass f bereits bijektiv ist. Sei $w := f(y)$. Wir betrachten die Funktion

$$g : x \to x, g(z) = \begin{cases} f(z) & f(z) \neq y \\ w & f(z) = y, \end{cases}$$

d.h. im Fall $w = y$, so gilt $f = g$. Es gibt 2 Fälle:

1. Fall: f ist injektiv. Dann ist aber auch g injektiv und somit nach Induktionsannahme bijektiv. Dann ist aber auch f bijektiv.

2. Fall: f ist surjektiv. Dann ist auch g surjektiv und somit bijektiv. Nach Konstruktion von g ist dann auch f surjektiv.

(b) Da M endlich ist, ist nach Präsenzaufgabe 1 auch M^M endlich. Damit ist auch $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ endlich, da $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq M^M$. Somit muss es $n, m \in \mathbb{N}$ geben mit $f^n = f^m$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $n < m$ gilt. Dann gilt

$$\mathrm{id}_M = \underbrace{f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}}_{n\text{-mal}} \circ \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-mal}} = (f^{-1})^n \circ f^n = (f^{-1})^n \circ f^m = f^{m-n},$$

also ist $f^{m-n} = \mathrm{id}_M$.

(c)
- Gegenbeispiele für (a): $\mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$ ist injektiv, aber nicht surjektiv;

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} n - 1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

ist surjektiv, aber nicht injektiv.
- Gegenbeispiel für (b): für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$ gilt $f^n(m) = m + n$, also gilt $f^n \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Definition. Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G, \circ)$, wobei G eine Menge ist und $\circ : G \times G \to G$ eine Verknüpfung mit den folgenden Eigenschaften:

(G1) $(g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k)$ für alle $g, h, k \in G$

(G2) es gibt $e \in G$ (das *neutrale Element*), sodass $g \circ e = e \circ g = g$ für alle $g \in G$

(G3) für jedes $g \in G$ gibt es g^{-1} (das zu g *inverse* Element) mit $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

$(G, \circ)$ heisst *abelsch*, falls $\circ$ kommutativ ist; d.h. $g \circ h = h \circ g$ für alle $g, h \in G$.

Aufgabe 31 (4 Punkte)**.** Die *Symmetriegruppe* S_3 des Dreiecks besteht aus allen Bewegungen (Spiegelungen, Drehungen und Kombinationen davon), die ein gleichseitiges Dreieck auf sich selbst an der selben Stelle in der Ebene abbilden.

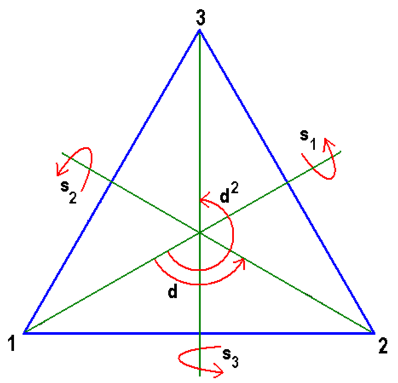
(a) Geben Sie alle Elemente von S_3 anhand einer Skizze an.

(b) Zeigen Sie, dass $(S_3, \circ)$ eine Gruppe ist, wobei $\circ$ die Komposition von Funktionen ist. Geben Sie dazu eine Verknüpfungstabelle an.

(c) Ist S_3 abelsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung. (a) Die Elemente sind

- die Identität e
- die Drehung d um 90°
- die Drehung d^2 um 240° (2fache Drehung um 120°)
- die Spiegelung s_1 an der Höhe h_a
- die Spiegelung s_2 an der Höhe h_b
- die Spiegelung s_3 an der Höhe h_c



Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/S3_(Gruppe)

(b) Die Verknüpfungstabelle sieht wie folgt aus:

$\circ$	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
e	e	d	d^2	s_1	s_2	s_3
d	d	d^2	e	s_3	s_1	s_2
d^2	d^2	e	d	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	e	d	d^2
s_2	s_2	s_3	s_1	d^2	e	d
s_3	s_3	s_1	s_2	d	d^2	e

(G1) gilt, da die Verknüpfung von Bewegungen ein Spezialfall der Komposition von Funktionen ist, und diese assoziativ ist (wurde in der Vorlesung gezeigt). (G2) gilt, da e ein neutrales Element ist. (G3) gilt, denn

$$e^{-1} = e, d^{-1} = d^2, (d^2)^{-1} = d, s_1^{-1} = s_1, s_2^{-1} = s_2 \text{ und } s_3^{-1} = s_3.$$

(c) Aus der Verknüpfungstabelle ist ersichtlich, dass beispielsweise $d \circ s_1 = s_3$, aber $s_1 \circ d = s_2$, also ist S_3 nicht abelsch.