Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf Lösungen Übungsblatt 6

Aufgabe 25 (4 Punkte)**.** Seien M, N und P Mengen. Zeigen Sie, dass es Bijektionen

(a) $f : M \times N \to N \times M$ und

(b) $g : (M \times N) \times P \to M \times (N \times P)$

gibt. Welches Rechengesetze für Kardinalzahlen kann man daraus folgern?

Lösung. (a) Wir definieren

$$f : M \times N \to N \times M, (a, b) \mapsto (b, a).$$

Wir zeigen, dass f bijektiv ist.

- f ist injektiv: Seien $x, x' \in M \times N$ mit $f(x) = f(x')$. Seien $a, a' \in M$ und $b, b' \in N$ mit $x = (a, b)$ und $x' = (a', b')$. Dann gilt $(b, a) = f(x) = f(x') = (b', a')$. Aus der Eigenschaft von geordneten Paaren folgt dann $b = b'$ und $a = a'$. Also gilt auch $x = (a, b) = (a', b') = x'$.
- f ist surjektiv: Sei $y \in N \times M$. Seien $b \in N$ und $a \in M$ mit $y = (b, a)$. Dann ist $x = (a, b) \in M \times N$ und $f(x) = (b, a) = y$.

Die daraus resultierende Rechenregel ist $\mu \cdot \nu = \nu \cdot \mu$ für alle Kardinalzahlen μ und ν (Kommutativität der Multiplikation).

(b) Wir definieren

$$g : M \times (N \times P) \to (M \times N) \times P, (a, (b, c)) \mapsto ((a, b), c).$$

Wir weisen nach, dass g bijektiv ist.

- g ist injektiv: Seien $x, x' \in (M \times N) \times P$. Dann gibt es $a, a' \in M, b, b' \in N$ und $c, c' \in P$ mit $x = ((a, b), c)$ und $x' = ((a', b'), c')$. Dann gilt $(a, (b, c)) = f(x) = f(x') = (a', (b', c'))$. Aus der Eigenschaft von geordneten Paaren folgt $a = a'$ und $(b, c) = (b', c')$ und weiter $b = b'$ und $c = c'$. Somit ist

$$x = ((a, b), c) = ((a', b'), c') = x'.$$

- g ist surjektiv: Sei $y \in M \times (N \times P)$. Dann gibt es $a \in M, b \in N$ und $c \in P$ mit $y = (a, (b, c))$. Dann ist $x = ((a, b), c) \in (M \times N) \times P$ und $f(x) = (a, (b, c)) = y$.

Aufgabe 26 (6 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass

(a) die Multiplikation
(b) die Exponentiation

von Kardinalzahlen wohldefiniert ist.

Hinweis für (b): Betrachten Sie für Mengen M, N, M', N' und Bijektionen $f : M \to M'$ und $g : N \to N'$ die Funktion

$$h : M^N \to M'^{N'}, s \mapsto f \circ s \circ g^{-1}.$$

Lösung. (a) Seien M, M', N, N' Mengen mit $|M| = |M'| = \mu$ und $|N| = |N'| = \nu$ und seien $f : M \to M'$ und $g : N \to N'$ Bijektionen. Wir müssen zeigen, dass $|M \times N| = |M' \times N'|$, d.h. dass die Definition unabhäning von der Wahl der Mengen M, N ist. Wir definieren die Funktion

$$h : M \times N \to M' \times N', (a, b) \mapsto (f(a), g(b)).$$

Wir zeigen, dass h bijektiv ist.

- h ist injektiv: Seien $a \in M, b \in N$ und $h((a, b)) = h((a', b'))$. Dann gilt $(f(a), g(b)) = (f(a'), g(b'))$. Aus der Eigenschaft geordneter Paare folgt $f(a) = f(a')$ und $g(b) = g(b')$. Da f und g injektiv sind, folgt $a = a'$ und $b = b'$.
- h ist surjektiv: Sei $(c, d) \in M' \times N'$. Da f und g surjektiv sind, gibt es $a \in M$ und $b \in N$ mit $c = f(a)$ und $d = g(b)$. Dann folgt

$$h((a, b)) = (f(a), g(b)) = (c, d).$$

(b) Seien M, N, M', N' Mengen mit $|M| = |M'|$ und $|N| = |N'|$. Wir zeigen $|M^N| = |M'^{N'}|$. Seien $f : M \to M'$ und $g : N \to N'$ Bijektionen. Wir definieren

$$h : M^N \to M'^{N'}, s \to h(s) := f \circ s \circ g^{-1}.$$

Wir zeigen, dass h bijektiv ist.

- h ist injektiv: Seien $s, s' \in M^N$ mit $h(s) = h(s')$. Sei $b \in N$. Dann gilt

$$f(s(b)) = f(s(g^{-1}(g(b)))) = h(s)(g(b)) = h(s')(g(b)) = f(s'(b)).$$

Da f injektiv ist, folgt $s(b) = s'(b)$. Da b beliebig war, folgt $s = s'$.

- h ist surjektiv: Sei $t : N' \to M'$ eine Funktion. Wir müssen eine Funktion $s : N \to M$ finden mit $h(s) = t$. Es gilt:

$$\begin{aligned} h(s) = t &\iff f \circ s \circ g^{-1} = t \\ &\iff f^{-1} \circ f \circ s \circ g^{-1} = f^{-1} \circ t \\ &\iff s \circ g^{-1} = f^{-1} \circ t \\ &\iff s \circ g^{-1} \circ g = f^{-1} \circ t \circ g \\ &\iff s = f^{-1} \circ t \circ g. \end{aligned}$$

  Wir wählen also $s = f^{-1} \circ t \circ g$. Dann gilt $h(s) = t$ und somit ist h surjektiv.

Aufgabe 27 (6 Punkte)**.** Seien μ, ν und π Kardinalzahlen. Beweisen Sie die Rechenregeln

(a) $(\mu^\nu)^\pi = \mu^{\nu \cdot \pi}$

(b) $\mu^{\nu+\pi} = \mu^\nu \cdot \mu^\pi$.

Lösung. (a) Seien M, N und P Mengen mit $|M| = \mu, |N| = \nu$ und $|P| = \pi$. Wir müssen beweisen, dass $|(M^N)^P| = |M^{N \times P}|$. Wir definieren

$$f : (M^N)^P \to M^{N \times P}, s \mapsto f(s),$$

wobei $f(s)(b, c) := s(c)(b)$. Wir zeigen, dass f bijektiv ist.

- f ist injektiv: Seien $s, s' \in (M^N)^P$ mit $f(s) = f(s')$. Wir müssen zeigen, dass $s = s'$. Sei also $c \in P$ beliebig. Es genügt zu zeigen, dass $s(c) = s'(c)$. Sei nun $b \in N$ beliebig. Um zu zeigen, dass $s(c) = s'(c)$, reicht es zu beweisen, dass $s(c)(b) = s'(c)(b)$. Es gilt aber $s(c)(b) = f(s)(b, c) = f(s')(b, c) = s'(c)(b)$. Also gilt $s(c) = s'(c)$ und, da c beliebig war, auch $s = s'$.
- f ist surjektiv: Sei $t \in M^{N \times P}$. Wir definieren $s : P \to M^N$ durch $s(c)(b) := t(b, c)$, d.h. s ist die Funktion, die jedem $c \in P$ die Funktion $s(c)$ zuordnet, die wiederum jedem $b \in N$ den Wert $t(b, c) \in M$ zuordnet. Wir zeigen, dass $f(s) = t$. Sei also $(b, c) \in N \times P$. Dann gilt $f(s)(b, c) = s(c)(b) = t(b, c)$ wie gewünscht. Da (b, c) beliebig war, gilt $f(s) = t$.

(b) Seien M, N und P Mengen mit $|M| = \mu, |N| = \nu$ und $|P| = \pi$, wobei M und N disjunkt sind. Wir zeigen, dass $|M^{N \cup P}| = |M^N \times M^P|$. Wir betrachten die Funktion

$$g : M^{N\cup P} \to M^N \times M^P, s \mapsto (s \restriction_N, s \restriction_P).$$

Wir zeigen, dass g bijektiv ist.

- g ist injektiv: Seien $s, s' \in M^{N\cup P}$ mit $g(s) = g(s')$. Aus den Eigenschaften des geordneten Paars folgen $s \restriction_N = s' \restriction_N$ und $s \restriction_P = s' \restriction_P$. Sei $b \in N \cup P$. Falls $b \in N$, so folgt $s(b) = s \restriction_N (b) = s' \restriction_N (b) = s'(b)$. Falls $b \in P$, so folgt $s(b) = s \restriction_P (b) = s' \restriction_P (b) = s'(b)$. In beiden Fällen gilt $s(b) = s'(b)$ und, da b beliebig war, folgt $s = s'$.
- g ist surjektiv: Sei $(s_1, s_2) \in M^N \times M^P$. Wir definieren $s \in M^{N\cup P}$ durch
$$s(b) = \begin{cases} s_1(b) & b \in N \\ s_2(b) & b \in P. \end{cases}$$
Die Funktion s ist wohldefiniert, da N und P disjunkt sind. Offensichtlich gilt $s \restriction N = s_1$ und $s \restriction P = s_2$ und somit $g(s) = (s_1, s_2)$. Damit haben wir gezeigt, dass g surjektiv ist.

Aufgabe 28 (2 Punkte)**.** Für endliche Kardinalzahlen $\mu \neq 0$ gilt immer $\mu+\mu \neq \mu$. Betrachten Sie die Mengen

$$G := \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$U := \{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

und zeigen Sie, dass dies im Unendlichen falsch ist.

Lösung. Es gilt $f : \mathbb{N} \to G, n \mapsto 2n$ und $g : \mathbb{N} \to U, n \mapsto 2n+1$ sind bijektiv. Daraus folgt $|G| = |\mathbb{N}| = |U|$. Weiterhin gilt, dass G und U disjunkt sind. Somit erhalten wir $|G \cup U| = |G| + |U| = |\mathbb{N}| + |\mathbb{N}|$. Andrerseits gilt aber $G \cup U = \mathbb{N}$, also $|\mathbb{N}| = |G \cup U| = |\mathbb{N}| + |\mathbb{N}|$.

Bemerkung: Die Kardinalität von $\mathbb{N}$ wird als $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$ bezeichnet; $\aleph_0$ ist die kleinste unendliche Kardinalzahl und aus der Aufgabe folgt $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Georg Cantor hat bewiesen, dass es unterschiedlich grosse unendliche Kardinalzahlen gibt.