Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf Lösungen Übungsblatt 5

Aufgabe 20 (4 Punkte)**.** Sei $f : M \to N$ eine Funktion und seien $X, Y \subseteq N$. Zeigen Sie folgende Gleichheiten:

(a) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
(b) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

Lösung. (a) Es gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(X \cup Y) &\iff f(x) \in X \cup Y \\ &\iff f(x) \in X \text{ oder } f(x) \in Y \\ &\iff x \in f^{-1}(X) \text{ oder } x \in f^{-1}(Y) \\ &\iff x \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y). \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(X \cap Y) &\iff f(x) \in X \cap Y \\ &\iff f(x) \in X \text{ und } f(x) \in Y \\ &\iff x \in f^{-1}(X) \text{ und } x \in f^{-1}(Y) \\ &\iff x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y). \end{aligned}$$

Aufgabe 21 (5 Punkte)**.** Sei $f : M \to N$ eine Funktion.

(1) Zeigen Sie die Gleichheit $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ für alle Teilmengen $X, Y \subseteq M$.
(2) Zeigen Sie, dass $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ genau dann für alle $X, Y \subseteq M$ gilt, wenn f injektiv ist.

Lösung. (a) Seien $X, Y \subseteq M$. Wir zeigen zwei Inklusionen.

"$\subseteq$": Sei $y \in f(X \cup Y)$. Dann gibt es ein $x \in X \cup Y$ mit $f(x) = y$. Falls $x \in X$, so gilt $y = f(x) \in f(X)$. Falls $x \in Y$, so gilt $y = f(x) \in f(Y)$. In beiden Fällen folgt $y \in f(X) \cup f(Y)$.

"$\supseteq$": Sei $y \in f(X) \cup f(Y)$. Dann gilt $y \in f(X)$ oder $y \in f(Y)$. Im ersten Fall gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ und im zweiten Fall gibt es ein $x \in Y$ mit $f(x) = y$. In beiden Fällen gibt es ein $x \in X \cup Y$ mit $f(x) = y$. Also folgt $y \in f(X \cup Y)$.

(b) Wir nehmen zuerst an, dass $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ für alle $X, Y \subseteq M$ gilt. Wir müssen beweisen, dass f injektiv ist. Wir machen einen Kontrapositionsbeweis. Seien also $x, x' \in M$ mit $x \neq x'$. Wir setzen $X := \{x\}$ und $Y := \{x'\}$. Wegen $x \neq x'$ gilt $X \cap Y = \emptyset$ und somit

$$\emptyset = f(\emptyset) = f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y) = \{f(x)\} \cap \{f(x'\}.$$

Also folgt $f(x) \neq f(x')$.

Umgekehrt sei f injektiv und seien $X, Y \subseteq M$. Wir zeigen zwei Inklusionen.

"$\subseteq$": Sei $y \in f(X \cap Y)$. Dann gibt es ein $x \in X \cap Y$ mit $f(x) = y$. Also ist $x \in X$ und $x \in Y$ und somit $y \in f(X)$ und $y \in f(Y)$. Also folgt $y \in f(X) \cap f(Y)$.

"$\supseteq$": Sei $y \in f(X) \cap f(Y)$. Dann gilt $y \in f(X)$ und $y \in f(Y)$. Somit gibt es $x \in X$ und $x' \in Y$ mit $f(x) = y$ und $f(x') = y$. Daraus folgt $f(x) = y = f(x')$ und somit $x = x'$, da f injektiv ist. Also folgt $x \in X \cap Y$ und $y \in f(X \cap Y)$.

Aufgabe 22 (6 Punkte)**.** Seien M, N, P und Q Mengen und sei

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & N \arrow[d, "t"] \\ P \arrow[r, "g"'] & Q \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm, d.h. $t \circ f = g \circ s$. Seien f und g bijektiv.

(a) Zeigen Sie, dass s genau dann injektiv ist, wenn t injektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass s genau dann surjektiv ist, wenn t surjektiv ist.

(c) Reicht es in (a) bzw. (b) lediglich vorauszusetzen, dass f (resp. g) injektiv/surjektiv ist? Etwas genauer, was sind die minimalen Anforderungen an f und g, damit (a) und (b) gelten?

Lösung. (a) Wir nehmen zunächst an, dass s injektiv ist und zeigen, dass dann auch t injektiv ist. Seien $y, y' \in N$ mit $t(y) = t(y')$. Da f surjektiv ist, gibt es $x, x' \in M$ mit $f(x) = y$ und $f(x') = y'$. Nun gilt

$$(g \circ s)(x) = (t \circ f)(x) = t(f(x)) = t(y) = t(y') = t(f(x')) = (t \circ f)(x') = (g \circ s)(x').$$

Nach Annahme sind aber g und s injektiv und somit auch $g \circ s$ (Vorlesung, Lemma 36). Also gilt $x = x'$ und damit haben wir gezeigt, dass t injektiv ist.

Umgekehrt nehmen wir an, dass t injektiv ist. Seien $x, x' \in M$ mit $s(x) = s(x')$. Dann gilt

$$(t \circ f)(x) = (g \circ s)(x) = g(s(x)) = g(s(x')) = (g \circ s)(x') = (t \circ f)(x').$$

Nach Annahme sind sowohl f als auch t injektiv, also auch $t \circ f$ (Vorlesung, Lemma 36). Daraus folgt $x = x'$ und somit ist auch s injektiv.

(b) Wir nehmen zuerst an, dass s surjektiv ist und zeigen, dass t surjektiv ist. Sei $w \in Q$. Da s und g surjektiv sind, ist auch $g \circ s$ surjektiv (Aufgabe 18 (a)). Somit gibt es ein $x \in M$ mit $(g \circ s)(x) = w$. Also folgt

$$w = (g \circ s)(x) = (t \circ f)(x) = t(f(x)) = t(y)$$

für $y := f(x)$. Somit ist t surjektiv.

Umgekehrt sei t surjektiv und sei $z \in P$. Aus Aufgabe 18 (a) folgt, dass $t \circ f$ surjektiv ist, da sowohl f als auch t surjektiv sind. Somit gibt es ein $x \in M$ mit $(t \circ f)(x) = g(z)$. Also gilt

$$g(s(x)) = (g \circ s)(x) = (t \circ f)(x) = g(z).$$

Da g injektiv ist, folgt $z = s(x)$. Damit haben wir gezeigt, dass s surjektiv ist.

(c) In Teilaufgabe (a) haben wir nur verwendet, dass f bijektiv ist und g injektiv ist. Wir zeigen, dass, falls eine dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, (a) nicht stimmt.

- Gegenbeispiel für f nicht injektiv: $M = \{0, 1\}, N = P = Q = \{0\}$ und alle Werte werden auf 0 abgebildet. Dann ist t injektiv, aber s ist nicht injektiv.
- Gegenbeispiel für f nicht surjektiv: $M = P = Q = \{0\}, N = \{0, 1\}$ und alle Werte werden auf 0 abgebildet. Dann ist s injektiv, aber t ist nicht injektiv.
- Gegenbeispiel für g nicht injektiv: $M = N = P = \{0, 1\}$ und $Q = \{0\}$ und $f = s = \mathrm{id}$, und $t = g$ bilden alle Werte auf 0 ab. Dann ist s injektiv, aber t ist nicht injektiv.

In Teilaufgabe (b) haben wir nur verwendet, dass f surjektiv und g bijektiv ist. Wir zeigen, dass diese Bedingungen auch notwendig sind.

- Gegenbeispiel für f nicht surjektiv: $M = \{0\}, N = P = Q = \{0, 1\}$ und alle Werte werden auf sich selbst abgebildet. Dann ist t surjektiv, aber s ist nicht surjektiv.

- Gegenbeispiel für g nicht injektiv: $M = N = Q = \{0\}, P = \{0, 1\}$, und alle Werte werden auf 0 abgebildet. Dann ist t surjektiv, aber s ist nicht surjektiv.
- Gegenbeispiel für g nicht surjektiv: $M = N = P = \{0\}$, $Q = \{0, 1\}$ und alle Werte werden auf 0 abgebildet. Dann ist s surjektiv, aber t ist nicht surjektiv.

Aufgabe 23 (2 Punkte)**.** Geben Sie eine bijektive Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ an. Inwiefern bedeutet das, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ "gleich gross" sind und was ist daran paradox?

Lösung. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} k & n = 2k \text{ ist gerade} \\ -k-1 & n = 2k+1 \text{ ist ungerade.} \end{cases}$$

Dann ist f surjektiv, da jede Zahl in $\mathbb{Z}$ entweder von der Form k oder $-k$ ist mit $k \in \mathbb{N}$. Im ersten Fall gilt $k = f(2k)$ und im zweiten Fall gilt $-k = f(2k+1)$. Die Funktion f ist auch injektiv, da die Darstellung von geraden Zahlen in der Form $2k$ (resp. von ungeraden Zahlen in der Form $2k+1$) eindeutig ist.
$\mathbb{N}$ ist zwar eine echte Teilmenge von $\mathbb{Z}$, jedoch kann man jedem Element von $\mathbb{N}$ eindeutig ein Element von $\mathbb{Z}$ zuordnen. In diesem Sinne kann man sagen, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ "gleich viele" Elemente haben. Dasselbe gilt nicht im Endlichen (eine echte Teilmenge N einer Menge M kann nicht bijektiv auf M abgebildet werden).

Aufgabe 24 (1 Punkt)**.** Seien M, N, P Mengen. Beweisen Sie die Gleichheit

$$M \times (N \cap P) = (M \times N) \cap (M \times P).$$

Lösung. Wir zeigen zwei Inklusionen.

"$\subseteq$" Sei $(x, y) \in M \times (N \cap P)$. Dann gilt $x \in M$ und $y \in N \cap P$, also $y \in N$ und $y \in P$. Damit gilt aber $(x, y) \in M \times N$ und $(x, y) \in M \times P$, also $(x, y) \in M \times (N \cap P) = (M \times N) \cap (M \times P)$.

"$\supseteq$" Sei $z \in M \times (N \cap P) = (M \times N) \cap (M \times P)$. Dann gibt es $x, x' \in M, y \in N$ und $y' \in P$ mit $z = (x, y)$ und $z = (x', y')$. Daraus folgt $x = x'$ und $y = y'$. Somit liegt $y \in N \cap P$, also $z = (x, y) \in M \times (N \cap P)$.