Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf — Lösungen Übungsblatt 4

Aufgabe 15 (3 Punkte)**.**

(a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{15}$ irrational ist.

(b) Wieso funktioniert der Beweis nicht, wenn man 15 durch 9 ersetzt?

Lösung.

(a) Wir zeigen zuerst, dass wenn $n \cdot m$ durch 3 teilbar ist, so ist n durch 3 teilbar oder m ist durch 3 teilbar. Wir zeigen dies per Kontraposition. Falls beide nicht durch 3 teilbar sind, haben sie entweder Rest 1 oder Rest 2. Es gibt also folgende Fälle:

1. Fall: $n = 3k + 1, m = 3l + 1$ (beide haben Rest 1 bei der Division durch 3). Dann hat $n \cdot m = (3k + 1)(3l + 1) = 3(3kl + k + l) + 1$ ebenfalls Rest 1 und ist somit nicht durch 3 teilbar.

2. Fall: $n = 3k + 1, m = 3l + 2$ (n hat Rest 1 und m Rest 2 bei der Division durch 3). Dann hat $n \cdot m = (3k + 1)(3l + 2) = 3(3kl + 2k + l) + 2$ ebenfalls Rest 2 und ist somit nicht durch 3 teilbar.

2. Fall: $n = 3k+2, m = 3l+1$ (n hat Rest 2 und m Rest 1 bei der Division durch 3). Gleich wie der letzte Fall, mit n und m, sowie k und l vertauscht.

2. Fall: $n = 3k + 2, m = 3l + 2$ (beide haben Rest 2 bei der Division durch 3). Dann hat $n \cdot m = (3k + 2)(3l + 2) = 3(3kl + 2k + 2l) + 4 = 3(3kl + 2k + 2l + 1) + 1$ Rest 1 und ist somit nicht durch 3 teilbar.

Damit folgt also, dass $n \cdot m$ nicht durch 3 teilbar ist. Insgesamt haben wir also bewiesen, dass wenn $n \cdot m$ durch 3 teilbar ist, so auch n oder m.

Wir beweisen nun unsere Behauptung. Der Beweis ist sehr ähnlich wie der Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist: Angenommen, die Behauptung ist falsch, so ist $\sqrt{6}$ rational, also können wir $\sqrt{2}$ als einen gekürzten Bruch

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

darstellen mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Durch Quadrieren auf beiden Seiten folgt

$$15 = \frac{m^2}{n^2},$$

also

$$3 \cdot 5 \cdot n \cdot n = m \cdot m.$$

Somit ist $m \cdot m$ durch 3 teilbar, und damit auch m. Also folgt

$$5 \cdot n \cdot n = m \cdot \frac{m}{3}.$$

Da aber m durch 3 teilbar ist, ist die rechte Seite durch 3 teilbar und damit auch die linke. Weil 5 nicht durch 3 teilbar ist, muss also n durch drei teilbar sein. Damit haben aber n und m beide 3 als Teiler und $\frac{m}{n}$ ist kein gekürzter Bruch, ein Widerspruch.

(b) In der 10. Zeile hätten wir dann

$$3 \cdot n \cdot n = m \cdot \frac{m}{3}.$$

Dann können wir aber nicht folgern, dass n durch 3 teilbar ist, denn $3 \cdot n \cdot n$ enthält ja schon den Faktor 3.

Aufgabe 16 (3 Punkte)**.** Zeigen Sie per Widerspruch, dass wenn drei Zahlen x, y und z irrational sind, so gibt es unter diesen Zahlen mindestens zwei Zahlen, deren Summe auch irrational ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten rationaler Zahlen wieder rational sind.

Lösung. Seien x, y und z irrational. Wir betrachten

$$a := x + y$$

$$b := x + z$$

$$c := y + z.$$

Wir müssen zeigen, dass a, b oder c irrational ist. Wir machen einen Widerspruchsbeweis and nehmen an, a, b und c seien alle rational. Dann ist aber auch

$$\frac{a + b - c}{2} = \frac{(x + y) + (x + z) - (y + z)}{2} = x$$

rational, da Summen, Differenzen und Quotienten von rationalen Zahlen wieder rational sind. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass x irrational ist. Somit muss eine der Zahlen a, b und c irrational sein.

Aufgabe 17 (2 Punkte)**.** Seien X, Y Mengen und E eine „Eigenschaft", die von $x \in X$ und $y \in Y$ abhängt. Finden Sie je ein mathematisches und ein nicht-mathematisches Beispiel, das veranschaulicht, dass (1) und (2) nicht dasselbe ausdrücken.

(1) $\forall x \in X \, \exists y \in Y : E(x, y)$

(2) $\exists y \in Y \, \forall x \in X : E(x, y)$

Lösung. Ein nicht-mathematisches Beispiel:

(1) Für jedes Schloss gibt es einen Schlüssel, der ins Schloss passt.
(2) Es gibt einen Schlüssel, der in jedes Schluss passt.

Ein mathematisches Beispiel:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N} : m \geq n$ (wahr).
(2) $\exists m \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : m \geq n$ (falsch, da es keine grösste natürliche Zahl gibt).

Aufgabe 18 (6 Punkte)**.** Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Beweisen Sie, dass falls f und g surjektiv sind, auch $g \circ f$ surjektiv ist.
(b) Beweisen Sie, dass falls $g \circ f$ surjektiv ist, auch g surjektiv ist.
(c) Falls $g \circ f$ surjektiv ist, ist dann auch f surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung.

(a) Seien f und g surjektiv. Wir zeigen, dass $g \circ f$ surjektiv ist. Sei $z \in C$. Da g surjektiv ist, gibt es ein $y \in B$ mit $g(y) = z$. Da aber auch f surjektiv ist, gibt es ein $x \in A$ mit $f(x) = y$. Dann gilt $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Damit haben wir gezeigt, dass $g \circ f$ surjektiv ist.
(b) Sei $g \circ f$ surjektiv. Wir zeigen, dass g auch surjektiv ist. Sei $z \in C$. Dann gibt es ein $x \in A$ mit $(g \circ f)(x) = z$. Wir setzen $y := f(x)$. Dann gilt $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$. Somit ist g surjektiv.
(c) Die Aussage ist falsch: Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $A = C\{0\}, B = \{0, 1\}$ mit $f(0) = 0$ und $g(0) = g(1) = 0$. Dann gilt $(g \circ f)(0) = 0$ und $g \circ f$ ist surjektiv (sogar bijektiv!), aber f ist nicht surjektiv, da es kein Element $x \in A$ gibt mit $f(x) = 1$.

Aufgabe 19 (4 Punkte)**.**

(a) Zeigen Sie, dass $f(x) := x + [x]$ injektiv ist, wobei $[x]$ die sogenannte *Gaussklammer* bezeichnet, welche folgendermassen definiert ist:

$$[x] := \text{grösstes Element der Menge } \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

Ist $g(x) := x - [x]$ auch injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
(b) Zeigen Sie, dass $h(x) := 3x^2 + 6x + 13$ auf $(-1, \infty)$ injektiv ist.

Lösung.

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(y)$. Wir machen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass $x \neq y$. Dann gilt entweder $x < y$ oder $y < x$. Da beide Fälle analog bewiesen werden, genügt es den ersten Fall zu betrachten. Da $x < y$, so ist auch $[x] \leq [y]$. Insgesamt gilt also $f(x) = x + [x] < y + [y] = f(y)$, insbesondere folgt also $f(x) \neq f(y)$, ein Widerspruch. Damit haben wir gezeigt, dass f injektiv ist.

Andrerseits ist g nicht injektiv, da zum Beispiel $g(0) = g(1)$, aber $0 \neq 1$.

(b) Wir nehmen an, dass $x, y \in (-1, \infty)$ mit $h(x) = h(y)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x + 13 &= 3y^2 + 6y + 13 \\ 3(x^2 - y^2) + 6(x - y) &= 0 \\ (x + y)(x - y) + 2(x - y) &= 0 \\ (x - y)(x + y + 2) &= 0. \end{aligned}$$

Somit gilt entweder $x - y = 0$ (und somit wie gewünscht $x = y$) oder $x + y + 2 = 0$. Im zweiten Fall folgt dann aber $x + y = -2$, was nicht möglich ist, da $x, y > -1$. Also gilt $x = y$. Damit haben wir gezeigt, dass h injektiv ist.