Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf	Lösungen Übungsblatt 3

Aufgabe 11 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die Aussagen

(1) Wenn es schneit, so ist es kalt.

(2) Wenn es nicht kalt ist, so kann es nicht schneien.

(a) Drücken Sie (1) und (2) durch aussagenlogische Terme aus.

(b) Beweisen Sie, dass (1) und (2) dasselbe ausdrücken.

(c) Erläutern Sie, wie man die in (b) bewiesene Tatsache als Beweismethode (die sogenannte *Kontraposition*) verwenden kann.

(d) Verwenden Sie diese Beweismethode, um Folgendes zu beweisen:

Sei a eine natürliche Zahl. Wenn a^2 eine ungerade Zahl ist, so ist auch a ungerade.

Hinweis: eine natürliche Zahl a ist genau dann gerade, wenn es eine natürliche Zahl k gibt mit $a = 2 \cdot k$.

Lösung.

(a) Wir schreiben X für "es schneit" und Y für "es ist kalt". Dann können wir die gegebenen Sätze umformulieren als

(1) $X \to Y$

(2) $\neg Y \to \neg X$.

(b) Wir vergleichen die Wahrheitstafeln von $X \to Y$ und $\neg Y \to \neg X$:

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$X \to Y$	$\neg Y \to \neg X$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$

Da beide Terme dieselbe Wahrheitstafel besitzen, drücken sie (logisch gesehen) dasselbe aus.

(c) Wenn man eine Formel der Form "φ impliziert ψ" beweisen möchte, so kann man stattdessen die Formel "nicht ψ impliziert nicht φ" beweisen, d.h. man nimmt an, dass ψ falsch ist und zeigt, dass dann auch φ falsch sein muss.

(d) Wir möchten per Kontraposition beweisen, dass falls a^2 ungerade ist, auch a ungerade sein muss. Wir zeigen also, dass falls a nicht ungerade ist, auch a^2 nicht ungerade sein kann. Sei also a nicht ungerade. Dann ist a gerade, also gibt es eine natürliche Zahl k mit $a = 2k$. Dann gilt $a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$. Somit ist aber auch a^2 gerade, also nicht ungerade.

Aufgabe 12 (6 Punkte)**.** Seien X, Y und Z aussagenlogische Variablen.

(a) Zeigen Sie, dass $((X \vee Y) \wedge (X \to Z) \wedge (Y \to Z)) \to Z$ eine Tautologie ist.

(b) Erläutern Sie, wieso (a) verwendet werden kann, um Beweise durch Fallunterscheidung zu machen.

(c) Die *symmetrische Differenz* von A und B ist definiert als

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Zeigen Sie per Fallunterscheidung, dass $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Lösung.

(a) Wir beweisen die Behauptung durch Vereinfachen mit Hilfe der aussagenlogischen Regeln. Alternativ kann man auch eine Wahrheitstafel erstellen. Sei $T := ((X \vee Y) \wedge (X \to Z) \wedge (Y \to Z)) \to Z$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
T &= \neg((X \vee Y) \wedge (X \to Z) \wedge (Y \to Z)) \vee Z \\
&= \neg((X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee Z)) \vee Z \\
&= (\neg X \wedge \neg Y) \vee (\neg(\neg X) \wedge \neg Z) \vee (\neg(\neg Y) \wedge \neg Z) \vee Z \\
&= (\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge \neg Z) \vee (Y \wedge \neg Z) \vee Z \\
&= (\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge \neg Z) \vee ((Y \vee Z) \wedge (\neg Z \vee Z)) \\
&= (\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge \neg Z) \vee (Y \vee Z) \\
&= (\neg X \wedge \neg Y) \vee ((X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg Z \vee Y \vee Z)) \\
&= (\neg X \wedge \neg Y) \vee (X \vee Y \vee Z) \\
&= (\neg X \vee X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg Y \vee X \vee Y \vee Z),
\end{aligned}$$

was immer den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ erhält, da sowohl $X \vee \neg X$ und $Y \vee \neg Y$ immer den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ erhalten, und somit auch $\neg X \vee X \vee Y \vee Z$ und $\neg Y \vee X \vee Y \vee Z$.

(b) Der Term in (a) bedeutet, dass wenn wir für drei Formeln φ, ψ und χ wissen, dass $||\varphi$ oder $\psi|| = \mathbb{W}$, und auch dass $||\varphi$ impliziert $\chi|| = \mathbb{W}$ und $||\psi$ impliziert $\chi|| = \mathbb{W}$, so muss $||\chi|| = \mathbb{W}$ gelten. In anderen Worten, wenn wir wissen, dass einer der Fälle φ oder ψ wahr ist, und beweisen, dass (1. Fall) φ die Formel χ impliziert, und (2. Fall) ψ auch χ impliziert, so haben wir χ bewiesen. Ein Spezialfall davon ist, wenn ψ die Formel “nicht φ” ist.

(c) Wir müssen zwei Inklusionen zeigen.

"$\subseteq$" Sei $x \in A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Dann gilt entweder $x \in A \setminus B$ oder $x \in B \setminus A$. Wir haben also 2 Fälle:

1. Fall: $x \in A \setminus B$. Dann gilt $x \in A$ und $x \notin B$. Wegen $x \in A$ gilt auch $x \in A \cup B$. Da $x \notin B$, gilt auch $x \notin A \cap B$. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

2. Fall: $x \in B \setminus A$. Dann gilt $x \in B$ und $x \notin A$. Wegen $x \in B$ gilt auch $x \in A \cup B$. Da $x \notin A$, gilt auch $x \notin A \cap B$. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

"$\supseteq$" Sei $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Dann gilt $x \in A \cup B$ und $x \notin A \cap B$. Wir haben also 2 Fälle:

1. Fall: $x \in A$. Wäre $x \in B$, so wäre $x \in A \cap B$. Da dies nicht der Fall ist, gilt $x \notin B$. Also folgt $x \in A \setminus B$ und insbesondere auch $x \in A\Delta B$.

2. Fall: $x \in B$. Wäre $x \in A$, so wäre $x \in A \cap B$. Da dies nicht der Fall ist, gilt $x \notin A$. Also folgt $x \in B \setminus A$ und insbesondere auch $x \in A\Delta B$.

Aufgabe 13 (2 Punkte)**.** Seien S und T zwei aussagenlogische Terme. Zeigen Sie, dass S und T genau dann dieselbe Wahrheitstafel haben, wenn $S \leftrightarrow T$ eine Tautologie ist.

Lösung. Wir müssen zwei Richtungen zeigen (Äquivalenzbeweis).
Wir nehmen zunächst an, dass S und T dieselbe Wahrheitstafel besitzen. Wir müssen zeigen, dass $S \leftrightarrow T = (S \to T) \wedge (T \to S)$ eine Tautologie ist. Die Wahrheitstafel von $S \leftrightarrow T$ sieht also wie folgt aus (da S und T aber zusammengesetzt sein können, kann es sein, dass nicht beide Fälle realisiert werden):

S	T	$S \to T$	$T \to S$	$S \leftrightarrow T$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$

Also ist $S \leftrightarrow T$ eine Tautologie.
Umgekehrt, falls $S \leftrightarrow T$ eine Tautologie ist, so sind auch $S \to T$ und $T \to S$ Tautologien, denn wenn einer der beiden Terme den Eintrag $\mathbb{F}$ in einer Reihe der Wahrheitstafel hätte, so hätte auch $S \leftrightarrow T$ den Eintrag $\mathbb{F}$ in derselben Reihe. Wir nehmen per Widerspruch an, dass S und T nicht dieselbe Wahrheitstafel besitzen. Dann gibt es eine Reihe in der Wahrheitstafel, in der S den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ hat und T den Wert $\mathbb{F}$, oder S hat den Wert $\mathbb{F}$ und T hat den Wert $\mathbb{W}$. Im ersten Fall hat dann $S \to T$ in dieser Reihe ebenfalls den Eintrag

$\mathbb{F}$, und im zweiten Fall hat $T \to S$ in dieser Reihe den Eintrag $\mathbb{F}$. Dies ist aber ein Widerspruch, und somit haben S und T dieselbe Wahrheitstafel.

Aufgabe 14 (4 Punkte)**.** In der Mengenlehre möchte man alle mathematischen Objekte als Mengen darstellen. So definiert man für a und b das *geordnete Paar* als

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass aus $(a, b) = (c, d)$ bereits $a = c$ und $b = d$ folgt.

(b) Argumentieren Sie kurz, warum die Eigenschaft aus (a) die Bezeichnung "geordnetes Paar" rechtfertigt.

(c) Zeigen Sie, dass die Eigenschaft aus (a) für die (ungeordnete) Paarmenge nicht gilt, d.h. $\{a, b\} = \{c, d\}$ impliziert nicht $a = c$ und $b = d$.

Lösung.

(a) Wir nehmen an, dass $(a, b) = (c, d)$. Somit ist $\{a\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Also gilt $\{a\} = \{c\}$ oder $\{a\} = \{c, d\}$. Wir haben also 2 Fälle:

1. Fall: $\{a\} = \{c\}$. Dann gilt $a \in \{a\} = \{c\}$, also folgt $a = c$.

2. Fall: $\{a\} = \{c, d\}$. Dann gilt $c \in \{c, d\} = \{a\}$, also folgt $c = a$ und somit auch $a = c$.

Es bleibt zu zeigen, dass $b = d$. Es gilt $\{a, b\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$. Somit gilt $\{a, b\} = \{a\}$ oder $\{a, b\} = \{a, d\}$. Wir haben also 2 Fälle.

1. Fall: $\{a, b\} = \{a\}$. Dann gilt $b \in \{a, b\} = \{a\}$ und somit $b = a$. Andrerseits ist aber $\{a, d\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$, also $\{a, d\} = \{a\}$. Damit folgt aber $d \in \{a, d\} = \{a\}$, also $d = a$. Insbesondere gilt dann $b = a = d$.

2. Fall: $\{a, b\} = \{a, d\}$. Dann folgt $b \in \{a, d\}$, also $b = a$ oder $b = d$. Falls $b = d$, so sind wir fertig. Fall $b = a$, so können wir wie oben argumentieren und folgern, dass $d = a$ und somit auch $b = a = d$.

(b) Die Eigenschaft aus (a) bedeutet, dass (a, b) geordnet ist, im Sinne dass die Reihenfolge von a und b eine Rolle spielt; im Allgemeinen gilt nicht $(a, b) = (b, a)$, denn daraus folgt bereits $a = b$. Teilaufgabe (c) verdeutlicht den Unterschied zwischen einem geordneten und einem ungeordneten Paar, denn (wie in der Vorlesung gezeigt wurde) es gilt $\{a, b\} = \{b, a\}$.

(c) Wir geben ein Gegenbeispiel an: Sei $a = d = 0$ und $b = c = 1$. Dann gilt $\{a, b\} = \{0, 1\} = \{1, 0\} = \{c, d\}$. Andrerseits gilt aber $a \neq c$ und $b \neq d$.