# Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf Lösungen Übungsblatt 2

**Aufgabe 6** (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, welche der folgenden aussagenlogischen Terme Tautologien sind.

(a) $(X \vee \neg Y) \to (Y \vee \neg X)$

(b) $((X \to Y) \wedge \neg Y) \to \neg X$.

*Lösung.* Ein aussagenlogischer Term ist genau dann eine Tautologie, wenn alle Einträge in der Wahrheitstafel $\mathbb{W}$ sind.

(a)

| $X$ | $Y$ | $\neg X$ | $\neg Y$ | $X \vee \neg Y$ | $Y \vee \neg X$ | $(X \vee \neg Y) \to (Y \vee \neg X)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ |
| $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ |
| $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ |
| $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ |

Aus der Wahrheitstafel wird ersichtlich, dass $(X \vee \neg Y) \to (Y \vee \neg X)$ keine Tautologie ist, denn der Eintrag in der zweiten Zeile ist $\mathbb{F}$.

(b)

| $X$ | $Y$ | $\neg X$ | $\neg Y$ | $X \to Y$ | $(X \to Y) \wedge \neg Y$ | $((X \to Y) \wedge \neg Y) \to \neg X$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ |
| $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ |
| $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ |
| $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ |

Somit ist $((X \to Y) \wedge \neg Y) \to \neg X$ eine Tautologie.

**Aufgabe 7** (2 Punkte)**.** Verwenden Sie die Regeln der Aussagenlogik um zu beweisen, dass alle aussagenlogischen Terme nur mit Hilfe der Operationen $\neg$ und $\wedge$ ausgedrückt werden können, d.h. die Operationen $\vee$ und $\to$ sind überflüssig.

*Lösung.* Wir müssen zeigen, dass aussagenlogische Terme der Form $X \vee Y$ und $X \to Y$ durch die Operationen $\wedge$ und $\neg$ ausgedrückt werden können. Es gilt:

- $X \vee Y = \neg(\neg X \wedge \neg Y)$, denn

$$\neg(\neg X \wedge \neg Y) = \neg(\neg X) \vee \neg(\neg Y) = X \vee Y.$$

- $X \to Y = \neg(X \wedge \neg Y)$, denn
$$X \to Y = \neg X \vee Y = \neg(\neg(\neg X) \wedge \neg Y) = \neg(X \wedge \neg Y),$$
wobei die zweite Umformung die obige Formel für $\vee$ verwendet.

**Aufgabe 8** (2 Punkte)**.** Gegeben sei die folgende Wahrheitstafel.

| $X$ | $Y$ | (a) | (b) |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ |
| $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ |
| $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ |
| $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ |

Finden Sie entsprechende aussagenlogische Terme für (a) und (b), die nur die aus $X, Y, \wedge, \vee$ und $\neg$ bestehen.

*Lösung.* Beispiele sind $X \vee \neg Y$ für (a) und $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$ für (b). Dies wird sofort aus der folgenden Wahrheitstafel ersichtlich:

| $X$ | $Y$ | $\neg X$ | $\neg Y$ | $X \vee \neg Y$ | $X \wedge Y$ | $\neg X \wedge \neg Y$ | $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ |
| $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ |
| $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ |
| $\mathbb{F}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{F}$ | $\mathbb{W}$ | $\mathbb{W}$ |

**Aufgabe 9** (6 Punkte)**.** Wir bezeichnen mit *Aussagen* solche Sätze, von welchen wir sinnvoll (und eindeutig!) sagen können, dass sie entweder wahr oder falsch sind. Sind $X, Y$ Aussagen, so ist $X$ die *Negation* von $Y$, falls $X$ genau dann wahr ist, wenn $Y$ falsch ist.

(a) Welche der folgenden Sätze sind Aussagen? Begründen Sie Ihre Antwort und im Falle einer Aussage, geben Sie an, ob sie wahr oder falsch ist.
  (1) Die Zahl 289041 ist durch 3 teilbar.
  (2) Dieser Satz ist falsch.
  (3) Ich sage nie die Wahrheit.

(b) Verneinen Sie die folgenden Aussagen (Negation):
  (1) Alle Frauen sind schön.
  (2) Der Boden ist vom Regen nass oder jemand hat ihn mit dem Wasserschlauch vollgespritzt.

(3) Jede Frau und jeder Mann hat schon mindestens einmal im Leben nicht alles vom Teller aufgegessen.

*Lösung.*

(a) (1) Ist eine Aussage, die wahr ist (folgt aus der Quersummenregel, da $2 + 8 + 9 + 0 + 4 + 1 = 24$).

(2) Ist keine Aussage: Denn wäre der Satz wahr, so ist er falsch, und umgekehrt. Somit führen beide Möglichkeiten zu einem Widerspruch, d.h. es handelt sich nicht um eine Aussage.

(3) Ist eine Aussage, aber eine falsche: wäre es eine wahre Aussage, so sage ich nicht die Wahrheit. Dann aber ist der Satz nicht wahr.
Ist der Satz dagegen nicht wahr, so folgt daraus, dass ich mindestens einmal die Wahrheit sage. Das muss allerdings nicht bei diesem Satz der Fall sein, womit kein Widerspruch entsteht. Damit ist der Satz eine falsche Aussage.

(b) (1) Es gibt (mindestens) eine Frau, die nicht schön ist.

(2) Der Boden ist nicht nass vom Regen und es gibt niemanden, der den Boden mit dem Wasserschlauch vollgespritzt hat. *Deutsch:* Der Boden ist weder vom Regen nass noch hat ihn jemand mit dem Wasserschlauch vollgespritzt.

(3) Es gibt mindestens eine Frau oder einen Mann, die oder der immer alles vom Teller aufgegessen hat.

**Aufgabe 10** (4 Punkte)**.** "Meiers werden uns heute abend besuchen", kündigt Frau Müller an. "Die ganze Familie, also Herr und Frau Meier mit ihren drei Kindern Lena, Kathrin und Walter?" fragt Herr Müller bestürzt. Darauf Frau Müller, die keine Gelegenheit vorbergehen lässt, ihren Mann zu logischem Denken anzuregen: "Nun, ich will es dir so erklären: Wenn Herr Meier kommt, dann bringt er auch seine Frau mit. Mindestens eines der beiden Kinder Walter und Kathrin kommt. Entweder kommt Frau Meier oder Lena, aber nicht beide. Entweder kommen Lena und Kathrin oder beide nicht. Und wenn Walter kommt, dann auch Kathrin und Herr Meier."

(a) Begründen Sie kurz durch Überlegen und sprachliches Argumentieren, wer alles zu Besuch kommt und wer nicht.

(b) Drücken Sie alle Aussagen im obigen Text durch aussagenlogische Terme aus.

(c) Verwenden Sie (b) um Ihre Lösung von (a) zu beweisen.

*Lösung.*

(a) Wir wissen mit Sicherheit, dass mindestens jemand kommt, nämlich Walter oder Kathrin. Wir betrachten diese beiden Fälle einzeln.

- Kommt Walter, so kommen auch Kathrin und Herr Meier. Mit Herr Meier kommt aber auch Frau Meier. Da Kathrin kommt, ist auch Lena dabei. Daraus folgt, dass in diesem Falle die ganze Familie kommt. Das steht also im Widerspruch dazu, dass Frau Meier und Lena keinesfalls zusammen kommen. Somit kann dieser Fall nicht eintreten.
- Kommt Kathrin, so kommt sicherlich auch Lena. Dann aber kann Frau Meier nicht kommen und daher auch Herr Meier nicht (denn er geht nicht ohne sie). Im ersten Schritt haben wir schon ausgeschlossen, dass Walter kommt. Somit ist klar, dass nur die beiden Töchter kommen.

(Lösung muss nicht ganz so ausführlich sein, es reicht auch die Lösung und ein Satz dazu).

(b) Wir nehmen Variablen $L$ für Lena, $K$ für Kathrin, $W$ für Walter, $F$ für Frau Meier und $H$ für Herr Meier. Der Text besagt dann:

$$
\begin{aligned}
&H \to F \\
&W \vee K \\
&(F \vee L) \wedge \neg(F \wedge L) \\
&(L \wedge K) \vee (\neg L \wedge \neg K) \\
&W \to (K \wedge H).
\end{aligned}
$$

(c) Wir wissen, dass alle Terme in (b) den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ erhalten sollen. Damit $W \vee K$ wahr wird, muss entweder $W$ den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ erhalten oder $K$. Wir gehen jetzt genau wie in (a) vor, ausser dass wir jetzt formal argumentieren.

- Falls $W$ den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ erhält, so auch $K \wedge H$, da ja $W \to (K \wedge H)$ den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ hat. Somit müssen auch $K$ und $H$ den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ erhalten. Weil aber $H \to F$ den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ hat, so muss auch $F$ den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ haben. Weil auch $(F \vee L) \wedge \neg(F \wedge L)$ den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ hat, so auch $F \vee L$ und $\neg(F \wedge L)$. Insbesondere hat $F \wedge L$ den Wahrheitswert $\mathbb{F}$, also auch $L$, da ja $F$ wahr ist. Andrerseits hat $(L \wedge K) \vee (\neg L \wedge \neg K)$ den Wahrheitswert $\mathbb{W}$, also auch entweder $L \wedge K$ oder $\neg L \wedge \neg K$. Dies ist aber beides nicht möglich da $L$ den Wahrheitswert $\mathbb{F}$ hat und $K$ den Wahrheitswert $\mathbb{W}$.

- Somit hat $W$ den Wahrheitswert $\mathbb{F}$ und $K$ den Wahrheitswert $\mathbb{W}$. Damit hat $W \to (K \wedge H)$ schon den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ wie gewünscht. Da $(L \wedge K) \vee (\neg L \wedge \neg K)$ den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ haben soll, muss entweder $L \wedge K$ oder $\neg L \wedge \neg K$ den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ haben. Weil $K$ den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ hat, so also auch $L$, denn $\neg L \wedge \neg K$ hat den Wahrheitswert $\mathbb{F}$. Nun möchten wir auch, dass $(F \vee L) \wedge \neg(F \wedge L)$ den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ hat, also auch $F \vee L$ und $\neg(F \wedge L)$. Ersteres gilt sowieso, da $L$ den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ hat, und zweiteres bedeutet, dass $F \wedge L$ den Wahrheitswert $\mathbb{F}$ hat und somit auch $F$. Da auch $H \to F$ den Wahrheitswert $\mathbb{W}$ haben soll, so muss $H$ den Wahrheitswert $\mathbb{F}$ haben, denn sonst hätte auch $F$ den Wahrheitswert $\mathbb{W}$.

Insgesamt gilt also: $K$ und $L$ haben Wahrheitswert $\mathbb{W}$, und $F, H$ und $W$ haben Wahrheitswert $\mathbb{F}$. Dies ist die einzige Belegung der Variablen, die die Terme in (b) wahr macht.