Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf Lösungen Übungsblatt 12

Aufgabe 49 (5 Punkte)**.**

(a) Beweisen Sie die *geometrische Summenformel*: Für jede Zahl $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

(b) Verwenden Sie (a) um zu zeigen, dass, falls $2^p - 1$ eine Primzahl ist (für $p \in \mathbb{N}$), bereits p eine Primzahl ist (2^p-1 ist dann eine sogenannte *Mersenne-Primzahl*). Gilt auch die Umkehrung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Betrachten Sie dazu die ersten fünf solchen Zahlen und verwenden Sie das Sieb des Erasthotenes.

Lösung. (a) Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Wir beweisen die Aussage per Induktion über n.

- *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=0}^{0} q^k = 1 = \frac{1-q^1}{1-q}$.
- *Induktionsvoraussetzung:* Sei $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ für ein beliebiges fest gewähltes $n \geq 1$.

  Induktionsschluss: Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} q^k &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} q^k\right) + q^n \\ &\overset{\text{IV}}{=} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \\ &= \frac{1-q^n+(1-q)q^n}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\end{aligned}$$

  wie gewünscht.

(b) Wir machen einen Kontrapositionsbeweis: Wir nehmen also an, dass $p = a \cdot b$ $(a, b > 1)$ keine Primzahl ist und folgern, dass auch $2^p - 1$ keine Primzahl ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{2^p-1}{2^a-1} &= \frac{(2^a)^b-1}{2^a-1} \\ &= \frac{1-(2^a)^b}{1-2^a} \\ &\overset{\text{(a)}}{=} \sum_{k=0}^{b-1}(2^a)^k \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

Da $a, b > 1$, gilt auch $\sum_{k=0}^{b-1}(2^a)^k > 1$ und $2^a - 1 > 1$, also ist $2^p - 1$ keine Primzahl.

Wir betrachten $2^p - 1$ für $p \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$:

- $2^2 - 1 = 3$ ist offensichtlich eine Primzahl.
- $2^3 - 1 = 7$ ist ebenfalls eine Primzahl.
- $2^5 - 1 = 31$, ist auch eine Primzahl, da keine der Zahlen $2, 3$ und 5 Teiler von 31 sind.
- $2^7 - 1 = 127$, ist eine Primzal, da keine der Zahlen $2, 3, 5, 7$ und 11 Teiler von 127 sind.
- $2^{11} - 1 = 2047$ ist keine Primzahl: Wir testen alle Primzahlen $\leq \lceil\sqrt{2047}\rceil = 45$ und stellen fest, dass 23 ein Teiler von 2047 ist. Somit ist 2047 keine Primzahl und insbesondere ist die Umkehrung falsch.

Aufgabe 50 (4 Punkte)**.** Überprüfen Sie, welche der Gruppenaxiome in den folgenden Beispielen erfüllt sind: Finden Sie dazu jeweils ein passendes neutrales Element e (falls es existiert) und überprüfen Sie jeweils auch, ob die Operation kommutativ ist.

(a) $(\mathbb{N}, \mathrm{kgV}, e)$

(b) $(\mathbb{Z}, \circ, e)$, wobei $x \circ y := x + 2y$

(c) $(\mathbb{R}, \odot, e)$, wobei $x \odot y := x + y + xy$.

Lösung. (a)

- *Assoziativität:* Seien $k, n, m \in \mathbb{N}$. Seien $k_1 = \mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(k, n), m))$ und $k_2 = \mathrm{kgV}(k, \mathrm{kgV}(n, m))$. Es gilt $\mathrm{kgV}(k, n) \mid k_1$ und $m \mid k_1$, also auch $k \mid k_1$ und $n \mid k_1$. Somit folgt $\mathrm{kgV}(n, m) \mid k_1$. Somit folgt $k_2 \mid k_1$. Analog zeigt man $k_1 \mid k_2$. Also gilt $k_1 = k_2$.
- *neutrales Element:* Das neutrale Element ist 1, denn $\mathrm{kgV}(n, 1) = n = \mathrm{kgV}(1, n)$.
- *Inverses Element:* Es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{kgV}(2, n) = 1$. Also existiert im Allgemeinen kein inverses Element.
- *Kommutativität:* Es gilt offensichtlich $\mathrm{kgV}(n, m) = \mathrm{kgV}(m, n)$.

(b)
- *Assoziativität:* Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Es gilt

  $$(x \circ y) \circ z = (x + 2y) \circ z = x + 2y + 2z$$
  $$x \circ (y \circ z) = x + 2(y \circ z) = x + 2(y + 2z) = x + 2y + 4z.$$

  Für $z \neq 0$ gilt also $(x \circ y) \circ z \neq x \circ (y \circ z)$, also ist $\circ$ nicht assoziativ.
- *Neutrales Element:* Angenommen $e \in \mathbb{Z}$ ist ein neutrales Element. Dann gilt

  $$x + 2e = x \circ e = x = e \circ x = e + 2x$$

  für alle $x \in \mathbb{Z}$. Dann gilt aber $x = e$ für jedes $x \in \mathbb{Z}$, ein Widerspruch. Also gibt es kein neutrales Element.
- *Inverses Element:* Existiert nicht, da es kein neutrales Element gibt.
- *Kommutativität:* Es gilt

  $$1 \circ 0 = 1 \neq 2 = 0 \circ 1,$$

  also ist $\circ$ nicht kommutativ.

(c) *Assoziativität:* Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(x \odot y) \odot z &= (x + y + xy) \odot z \\ &= (x + y + xy) + z + (x + y + xy)z \\ &= x + y + z + xy + xz + yz + xyz \\ &= x + (y + z + yz) + x(y + z + yz) \\ &= x \odot (y \odot z),\end{aligned}$$

also ist $\odot$ assoziativ.

(d) *Neutrales Element:* Es gilt

$$x \odot 0 = x = 0 \odot x,$$

also ist 0 ein neutrales Element.

(e) *Inverses Element:* Für $x \neq -1$ gilt

$$x \odot y = 0 \Longleftrightarrow x + y + xy = 0 \Longleftrightarrow y(1 + x) = x \Longleftrightarrow y = -\frac{x}{1 + x},$$

also ist $-\frac{x}{1+x}$ ein zu x inverses Element; und -1 hat kein Inverses.

(f) *Kommutativität:* Es gilt

$$x \odot y = x + y + xy = y + x + yx = y \odot x,$$

also ist $\odot$ kommutativ.

Es handelt sich also in keinem Fall um eine Gruppe. Bei (c) würde es um eine abelsche Gruppe handeln, falls man $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ statt $\mathbb{R}$ betrachten würde.

Aufgabe 51 (4 Punkte)**.** Sei $(G, *, e)$ eine Gruppe mit und sei $x \in G$ ein fest gewähltes Element. Wir definieren eine weitere Verknüpfung auf G durch

$$a \odot b := a * x * b.$$

(a) Finden Sie ein Element $e' \in G$, sodass $(G, \odot, e')$ eine Gruppe ist.
(b) Zeigen Sie, dass $(G, \odot, e')$ genau dann abelsch ist, wenn $(G, *, e)$ abelsch ist.

Lösung. (a)

- *Assoziativität:* Seien $a, b, c \in G$. Dann gilt

$$(a \odot b) \odot c = (a * x * b) * x * c = a * x * (b * x * c) = a \odot (b \odot c)$$

  wegen der Assoziativität von $*$.
- *Neutrales Element:* Das neutrale Element ist gegeben durch $e' = x^{-1}$: Für $a \in G$ gilt

$$a \odot x^{-1} = a * x * x^{-1} = a$$
$$x^{-1} \odot a = x^{-1} * x * a = a.$$

- *Inverses:* Wir behaupten, dass das Inverse von $a \in G$ durch $b := x^{-1} * a^{-1} * x^{-1}$ gegeben ist.

$$\begin{aligned} a \odot b &= a * x * x^{-1} * a^{-1} * x^{-1} \\ &= a * a^{-1} * x^{-1} \\ &= x^{-1}. \end{aligned}$$

  Analog zeigt man $b \odot a = x^{-1}$.

(b) Wir müssen zwei Richtungen beweisen.

"$\Rightarrow$" Sei $(G, \odot, e')$ abelsch und seien $a, b \in G$. Es gilt

$$\begin{aligned} a * b &= a * x * x^{-1} * b \\ &= a \odot (x^{-1} * b) \\ &= (x^{-1} * b) \odot a \\ &= x^{-1} * b * x * a \\ &= x^{-1} * b * x * e * a \\ &= ((x^{-1} * b) \odot e) * a \\ &= (e \odot (x^{-1} * b)) * a \\ &= e * x * x^{-1} * b * a \\ &= b * a, \end{aligned}$$

also ist auch $(G, *, e)$ abelsch.

"$\Leftarrow$" Sei $(G, *, e)$ abelsch und seien $a, b \in G$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a \odot b &= a * x * b \\ &= b * x * a \\ &= b \odot a \end{aligned}$$

und somit ist auch $(G, \odot, e')$ abelsch.

Aufgabe 52 (2 Punkte)**.** Sei $(G, *, e)$ eine Gruppe mit der Eigenschaft, dass $a^2 = e$ für alle $a \in G$.[2] Zeigen Sie, dass $(G, *, e)$ abelsch ist.

Lösung. Seien $a, b \in G$. Es gilt

$$\begin{aligned} a * b &= a * e * b \\ &= a * (a * b)^2 * b \\ &= a * (a * b * a * b) * b \\ &= (a * a) * b * a * (b * b) \\ &= a^2 * b * a * b^2 \\ &= e * b * a * e \\ &= b * a. \end{aligned}$$

---

[2] $a^2 := a * a$

Aufgabe 53 (3 Punkte)**.** Sei $G = \{a, b, e\}$ eine Menge mit 3 verschiedenen Elementen. Zeigen Sie, dass es genau eine Möglichkeit gibt, eine Operation auf G zu definieren, sodass e das neutrale Element ist. Ist G abelsch?

Lösung. Wir betrachten die Verknüpfungstabelle:

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a		
b	b		

Es fehlen noch die Einträge $a * a, a * b, b * a$ und $b * b$. Da a ein Inverses besitzt, gilt entweder $a * e = e$ oder $a * a = e$ oder $a * b = e$; $a * e$ ist aber unmöglich, da sonst $a = a * e = e$ gelten würde.

- 1. Fall: $a * a = e$. Dann gilt $a * b \neq e$, denn sonst wäre $a * a = e = a * b$ und mit der Kürzungsregel $a = b$. Andrerseits gilt auch $a * b \neq b$, denn sonst wäre $a * b = b = e * b$ und somit mit der Kürzungsregel $a = e$. Dann muss aber $a * b = a$ gelten und somit mit der Kürzungsregel $b = e$, ein Widerspruch.
- 2. Fall: $a * b = e$. Dies führt zu keinem Widerspruch.
  - Dann folgt $a * a = b$, denn $a * a = a$ würde mit der Kürzungsregel $a = e$ implizieren, und $a * a = e$ würde mit der Kürzungsregel $a = b$ implizieren.
  - Es gilt $b * a = e$ (mit demselben Argument wie für $a * b = e$ und ebenso $b * b = a$.

Die vollständige Verknüpfungstabelle sieht also wie folgt aus:

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Es ist leicht zu überprüfen, dass dies eine Gruppe definiert:

- Assoziativität ist offensichtlich erfüllt.
- e ist das neutrale Element.
- a und b haben ein Inverses, denn $a * b = b * a = e$.

Die Gruppe ist abelsch, da die Verknüpfungstabelle symmetrisch ist.