Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf Lösungen Übungsblatt 11

Aufgabe 45 (4 Punkte)**.** Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a, b > 0$. Beschreiben Sie, wie sich die Primfaktorzerlegung von $\mathrm{ggT}(a, b)$ und $\mathrm{kgV}(a, b)$ aus der Primfaktorzerlegung von a und b ergibt und zeigen Sie die Gleichheiten

$$\mathrm{ggT}(a^2, b^2) = (\mathrm{ggT}(a, b))^2$$
$$\mathrm{kgV}(a^2, b^2) = (\mathrm{kgV}(a, b))^2.$$

Lösung. Seien $p_0, \ldots, p_{k-1}$ die ersten k Primzahlen und sei k so gewählt, dass alle Primfaktoren von a und b in $\{p_1, \ldots, p_{k-1}$ vorkommen. Dann haben a und b eine Primfaktorzerlegung gegeben durch

$$a = \prod_{i=0}^{k-1} p_i^{e(p_i)} \quad \text{und} \quad b = \prod_{i=0}^{k-1} p_i^{f(p_i)}.$$

Dann folgt

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \prod_{i=0}^{k-1} p_i^{\min\{e(p_i), f(p_i)\}}$$
$$\mathrm{kgV}(a, b) = \prod_{i=0}^{k-1} p_i^{\max\{e(p_i), f(p_i)\}}$$

Wir müssen dies noch nachweisen. Sei also $g = \mathrm{ggT}(a, b)$ und $g' = \prod_{i=0}^{k-1} p_i^{\min\{e(p_i), f(p_i)\}}$. Aus Präsenzaufgabe 1 (b) folgt $g' \mid a$ und $g' \mid b$, also $g' \mid g$. Andrerseits kommt $p_i^{\min\{e(p_i), f(p_i)\}}$ in der Primfaktorzerlegung von a und von b vor, also auch in der Primfaktorzerlegung von g. Somit folgt $g = g'$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{kgV}(a, b) &= \frac{ab}{\mathrm{ggT}(a, b)} \\
&= \prod_{i=0}^{k-1} p_i^{e(p_i)+f(p_i)} : \prod_{i=0}^{k-1} p_i^{\min\{e(p_i), f(p_i)\}} \\
&= \prod_{i=0}^{k-1} p_i^{e(p_i)+f(p_i)-\min\{e(p_i), f(p_i)\}} \\
&= \prod_{i=0}^{k-1} p_i^{\max\{e(p_i), f(p_i)\}}.
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{ggT}(a^2, b^2) &= \prod_{i=0}^{k-1} p_i^{\min\{2e(p_i), 2f(p_i)\}} \\
&= \prod_{i=0}^{k-1} p_i^{2\min\{e(p_i), f(p_i)\}} \\
&= \left(\prod_{i=0}^{k-1} p_i^{\min\{e(p_i), f(p_i)\}}\right)^2 \\
&= (\operatorname{ggT}(a, b))^2
\end{aligned}$$

und analog für $\operatorname{kgV}(a, b)$, wobei wir $\min\{e(p_i), f(p_i)\}$ durch $\max\{e(p_i), f(p_i)\}$ ersetzen.

Aufgabe 46 (6 Punkte)**.** Für $a, n \in \mathbb{N}$ sei $A_n = a^{2^n} + 1$.

(a) Zeigen Sie, dass für $m > n$ in $\mathbb{N}$, $A_n \mid (A_m - 2)$.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{ggT}(A_m, A_n)$ für $m > n$ in $\mathbb{N}$.

(c) Verwenden Sie (b) um zu beweisen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Lösung. (a) Wir zeigen per Induktion über $k \geq 1$, dass $A_n \mid (A_{n+k} - 2)$.

- *Induktionsanfang*: Für $k = 1$ gilt

$$\begin{aligned}
A_{n+1} - 2 &= a^{2^{n+1}} - 1 = (a^{2^n})^2 - 1 = (a^{2^n} + 1)(a^{2^n} - 1) \\
&= A_n \cdot (a^{2^n} - 1).
\end{aligned}$$

- *Induktionsannahme:* Wir nehmen an, dass $A_n \mid (A_{n+k} - 2)$ für ein $k \geq 1$.

  Induktionsschritt: Es gilt

$$\begin{aligned}
A_{n+k+1} - 2 &= a^{2^{n+k}} - 1 = (a^{2^{n+k}})^2 - 1 = (a^{2^{n+k}} + 1)(a^{2^{n+k}} - 1) \\
&= A_{n+k} \cdot (A_{n+k} - 2).
\end{aligned}$$

  Da aber A_n nach Induktionsannahme $A_{n+k} - 2$ teilt, teilt A_n auch $A_{n+k+1} - 2$.

(b) Sei d ein Teiler von A_n und A_m für $m > n$. Dann teilt d nach (a) sowohl A_m als auch $A_m - 2$, d.h.

$$d \mid (A_m - (A_m - 2)) = 2.$$

(Dies folgt aus der allgemeinen Aussage, dass $d \mid a$ und $d \mid b$ auch $d \mid (a + b)$ impliziert). Daraus erhalten wir, dass jeder gemeinsame Teiler von A_n, A_m

in $\{1,2\}$ liegt. Das impliziert

$$\operatorname{ggT}(A_n, A_m) = \begin{cases} 1 & a \text{ gerade} \\ 2 & a \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(c) Wir wählen $a = 2$ (oder eine andere gerade Zahl). Dann sind nach (b) die A_n paarweise teilerfremd. Aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung folgt, dass jedes A_n einen Primfaktor hat, und dass für $n \neq m$ A_n und A_m keine gemeinsamen Primfaktoren haben. Da die Menge $\{A_n \mid n \geq 1\}$ unendlich ist, ist die Menge der Primfaktoren der A_n auch unendlich.

Aufgabe 47 (3 Punkte)**.** Für natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ definieren wir rekursiv

$$\operatorname{ggT}(a_1, \ldots, a_n) := \operatorname{ggT}(\operatorname{ggT}(a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n).$$

Wir nennen $a_1, \ldots, a_n$

- *teilerfremd*, falls $\operatorname{ggT}(a_1, \ldots, a_n) = 1$,
- *paarweise teilerfremd*, falls für alle $i \neq j$ in $\{1, \ldots, n\}$, $\operatorname{ggT}(a_i, a_j) = 1$.

Zeigen Sie, dass es für jedes $n \geq 3$ natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gibt, die teilerfremd sind, aber $\operatorname{ggT}(a_i, a_j) \neq 1$ für alle $i \neq j$.

Hinweis: Verwenden Sie die Existenz unendlich vieler Primzahlen.

Lösung. Seien $p_1, \ldots, p_n$ die ersten n Primzahlen. Wir setzen

$$a_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} p_k.$$

Dann gilt

$$\operatorname{ggT}(a_i, a_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^{n} p_k \neq 1$$

für $i \neq j$. Andrerseits gilt $\operatorname{ggT}(a_1, \ldots, a_n) = 1$, da für jede Primzahl p_i immer ein Faktor (und zwar a_i) existiert, der p_i nicht als Primfaktor hat.

Aufgabe 48 (5 Punkte)**.** Für $a \in \mathbb{N}$ sei $d(a)$ die Anzahl der Teiler von a.

(a) Zeigen Sie die Gleichheit $d(a \cdot b) = d(a) \cdot d(b)$ für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(a, b) = 1$. Gilt die Gleichheit auch, falls a und b nicht teilerfremd sind?

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für eine Zahl

$$a = \prod_{i=0}^{k-1} p_i^{e(p_i)}$$

in Primfaktorzerlegung

$$d(a) = \prod_{i=0}^{k-1} (e(p_i) + 1)$$

gilt.

Lösung. (a) Seien $a_0, \dots, a_{k-1}$ die Teiler von a, und $b_0, \dots, b_{l-1}$ die Teiler von b (also $k = d(a)$ und $l = d(b)$). Da a und b keine gemeinsamen Teiler haben, sind die Teiler von $a \cdot b$ gegeben durch alle Produkte $a_i b_j$, $0 \leq i < k, 0 \leq j < l$ von Teilern von a und Teilern von b. Also hat $a \cdot b$ genau $k \cdot l = d(a) \cdot d(b)$ Teiler.

Falls a und b nicht teilerfremd sind, so ist die Aussage im Allgemeinen falsch: Beispielsweise gilt $d(2) = 2$, aber $d(2 \cdot 2) = d(4) = 3$.

(b) Wir machen Induktion über die Anzahl k der Primfaktoren von a.

- *Induktionsanfang:* Für $k = 0$ hat a genau einen Primfaktor p_0 und $a = p_0^{e(p_0)}$. Dann sind die Teiler von a gegeben durch $1, p_0, p_0^2, \dots, p_0^{e(p_0)}$, also hat a genau $e(p_0) + 1$ Teiler.
- *Induktionsannahme:* Wir nehmen an, die Behauptung für jedes a mit k Primfaktoren gilt.

  Induktionsschritt: Sei $a = \prod_{i=0}^{k} p_i^{e(p_i)}$ eine Zahl mit $k+1$ Primfaktoren. Seien $b = \prod_{i=0}^{k-1} p_i^{e(p_i)}$ und $c = p_k^{e(p_k)}$. Dann gilt $\mathrm{ggT}(b, c) = 1$ und somit folgt aus Teilaufgabe (a) $d(a) = d(b \cdot c) = d(b) \cdot d(c)$. Andrerseits gilt nach Induktionsannahme $d(b) = \prod_{i=0}^{k-1}(e(p_i) + 1)$ und $d(c) = e(p_k) + 1$. Somit folgt

$$d(a) = d(b) \cdot d(c) = \left(\prod_{i=0}^{k-1} (e(p_i) + 1) \right) \cdot (e(p_k) + 1) = \prod_{i=0}^{k} (e(p_i) + 1).$$