Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf Lösungen Übungsblatt 10

Aufgabe 42 (7 Punkte)**.** Seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ sowie $g = \mathrm{ggT}(a, b)$ und $k = \mathrm{kgV}(a, b)$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Falls $g = 1$ und $a \mid bc$, so folgt $a \mid c$.
(b) $\mathrm{ggT}(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}) = 1$.
(c) Falls $a \mid c$ und $b \mid c$, so folgt $\frac{a \cdot b}{g} \mid c$.
(d) $a \cdot b = g \cdot k$.

Lösung. (a) Da $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $xa + yb = 1$. Weiterhin gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $ak = bc$. Nun gilt

$$\begin{aligned} k &= xak + ybk \\ &= xbc + ybk \\ &= b(xc + yk) \end{aligned}$$

und somit folgt $b \mid k$. Insbesondere ist $l := \frac{k}{b} \in \mathbb{N}$ und $a \cdot l = c$, also $a \mid c$.

(b) Seien $a', b' \in \mathbb{N}$ mit $a = a'g$ und $b = b'g$. Wir müssen zeigen, dass $\mathrm{ggT}(a', b') = 1$. Sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d \mid a'$ und $d \mid b'$. Dann gibt es a'', b'' mit $a' = a''d$ und $b' = b''d$. Dann folgt aber $a = a'g = (a''d)g = a''(dg)$ und analog $b = b''(dg)$. Somit gilt also $dg \mid a$ und $dg \mid b$, also $dg \mid g$. Daraus folgt $d = 1$. Insbesondere gilt also $\mathrm{ggT}(a', b') = 1$.

(c) Wir nehmen an, dass $a \mid c$ und $b \mid c$. Seien $a', b' \in \mathbb{N}$ mit $a = a'g$ und $b = b'g$. Weiterhin seien $k, l \in \mathbb{N}$ mit $ka = c = lb$. Dann gilt

$$ka'g = ka = c = lb = lb'g$$

und somit, da $g \neq 0$, $ka' = lb'$. Somit gilt also $a' \mid lb'$. Da aber $\mathrm{ggT}(a', b') = 1$ nach Teilaufgabe (b), folgt aus Teilaufgabe (a), dass $a' \mid l$. Nun gilt $\frac{ab}{g} = \frac{a'b'g^2}{g} = a'b'g$. Da $a' \mid l$ folgt nun $a'b'g \mid lb'g$; andrerseits ist $lb'g = lb = c$. Somit haben wir gezeigt, dass $\frac{ab}{g} \mid c$.

(d) Es gilt $a \mid k$ und $b \mid k$ und somit nach (c) auch $\frac{ab}{g} \mid k$. Da aber k das kleinste gemeinsame Vielfache ist von a und b, folgt $\frac{ab}{g} = k$.

Aufgabe 43 (6 Punkte)**.** Die *Fibonacci-Zahlen* sind rekursiv definiert durch

$$f_1 = 1, f_2 = 1 \text{ und } f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \text{ für } n \geq 1.$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $\mathrm{ggT}(f_n, f_{n+1}) = 1$ für $n \geq 1$
(b) $f_{n+m} = f_{m+1}f_n + f_m f_{n-1}$ für $n \geq 2$ und $m \geq 1$
(c) falls $n \mid m$ so folgt $f_n \mid f_m$.

Lösung. (a) Wir beweisen die Aussage per Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

- *Induktionsanfang:* Für $n = 1$ und $n = 2$ ist die Aussage trivialerweise erfüllt.
- *Induktionsannahme:* Wir nehmen jetzt an, dass $\mathrm{ggT}(f_n, f_{n+1}) = 1$ für ein fest gewähltes $n \geq 2$.

  Induktionsschritt: Nach Annahme gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $xf_n + yf_{n+1} = 1$. Dann gilt aber

$$yf_{n+2} + (y - x)f_{n+1} = x(f_n + f_{n+1}) + (y - x)f_{n+1} = xf_n + yf_{n+1} = 1.$$

  Somit gilt auch $\mathrm{ggT}(f_{n+1}, f_{n+2}) = 1$.

Dann Alternativ kann man auch den euklidischen Algorithmus anwenden.

(b) Wir beweisen die Aussage per Induktion über $m \in \mathbb{N}$. Für $m = 1$ ist die Behauptung trivial. Für $m = 2$ gilt $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n = 2fn + f_{n-1}$ wie gewünscht. Sei nun $m \geq 2$ eine feste natürliche Zahl, sodass die Behauptung für m sowie $m - 1$ gilt. Wir wollen zeigen, dass $f_{n+m+1} = f_{m+2}f_n + f_{m+1}f_{n-1}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{m+1}f_n + f_{m+1}f_{n-1} &= (f_{m+1} + f_m)f_n + (f_m + f_{m-1})f_{n-1} \\ &= (f_{m+1}f_n + f_m f_{n-1}) + (f_m f_n + f_{m-1}f_{n-1}) \\ &= f_{n+m} + f_{n+m-1} \\ &= f_{n+m+1}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(c) Wir zeigen per Induktion über $k \in \mathbb{N}$, dass $f_n \mid f_{kn}$.

- *Induktionsanfang:* Für $k = 1$ gilt offensichtlich $f_n \mid f_{kn} = f_n$.
- *Induktionsannahme:* Wir nehmen an, dass $f_n \mid f_{kn}$ für ein beliebiges fest gewähltes $k \geq 1$.

  Induktionsschritt: Es gilt

$$\begin{aligned} f_{(k+1)n} &= f_{kn+n} \\ &= f_{n+1}f_{kn} + f_n f_{kn-1}. \end{aligned}$$

  Nach Induktionsannahme gilt $f_n \mid f_{kn}$, also auch $f_n \mid f_{n+1}f_{kn}$. Weiterhin gilt $f_n \mid f_n f_{kn-1}$. Somit folgt $f_n \mid (f_{n+1}f_{kn} + f_n f_{kn-1})$, i.e.

$f_n \mid f_{(k+1)n}$. Dazu haben wir die Rechenregeln aus Präsenzaufgabe 1 benutzt.

Aufgabe 44 (5 Punkte)**.**

(a) Berechnen Sie den ggT von 2378 und 1769 und stellen Sie ihn als Linearkombination von 2378 und 1769 dar.

(b) Der ggT von drei natürlichen Zahlen a, b und c ist definiert als

$$\mathrm{ggT}(a,b,c) := \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a,b),c).$$

Zeigen Sie, dass der ggT assoziativ ist, d.h.

$$\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a,b),c) = \mathrm{ggT}(a,\mathrm{ggT}(b,c))$$

(c) Bestimmen Sie den $\mathrm{ggT}(385, 455, 637)$ und finden Sie ganze Zahlen x, y und z, die der Gleichung

$$\mathrm{ggT}(385,455,637) = 385x + 455y + 637z$$

genügen.

Lösung. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
2378 &= 1 \cdot 1769 + 609 \\
1769 &= 2 \cdot 609 + 551 \\
609 &= 1 \cdot 551 + 58 \\
551 &= 9 \cdot 58 + 29 \\
58 &= 2 \cdot 29.
\end{aligned}$$

Also gilt $\mathrm{ggT}(2378, 1769) = 29$. Weiterhin haben wir

$$\begin{aligned}
29 &= 551 - 9 \cdot 58 \\
&= 551 - 9(609 - 551) \\
&= 10 \cdot 551 - 9 \cdot 609 \\
&= 10(1769 - 2 \cdot 609) - 9 \cdot 609 \\
&= 10 \cdot 1769 - 29 \cdot 609 \\
&= 10 \cdot 1769 - 29(2378 - 1769) \\
&= 39 \cdot 1769 - 29 \cdot 2378.
\end{aligned}$$

(b) Seien $g = \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a,b),c)$ und $g' = \mathrm{ggT}(a,\mathrm{ggT}(b,c))$. Wir zeigen, dass $g \mid g'$ und $g' \mid g$. Dann folgt, dass $g = g'$. Es gilt $g \mid \mathrm{ggT}(a,b)$ und $g \mid c$. Insbesondere folgt auch $g \mid a$ und $g \mid b$. Damit folgt aber auch $g \mid a$ und $g \mid \mathrm{ggT}(b,c)$. Also $g \mid g'$.

Umgekehrt gilt $g' \mid a$ und $g' \mid \mathrm{ggT}(b,c)$. Also auch $g' \mid b$ und $g' \mid c$. Somit auch $g' \mid \mathrm{ggT}(a,b)$ und $g' \mid c$, also $g' \mid g$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} 455 &= 1 \cdot 385 + 70 \\ 385 &= 5 \cdot 70 + 35 \\ 70 &= 2 \cdot 35. \end{aligned}$$

Also $\mathrm{ggT}(455,385) = 35$ und

$$35 = 385 - 5 \cdot 70 = 385 - 5(455 - 385) = 6 \cdot 385 - 5 \cdot 455.$$

Nun berechnen wir $\mathrm{ggT}(637,35)$. Es gilt

$$\begin{aligned} 637 &= 18 * 35 + 7 \\ 35 &= 5 \cdot 7, \end{aligned}$$

also $\mathrm{ggT}(385,455,637) = \mathrm{ggT}(35,637) = 7$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} 7 &= 637 - 18 \cdot 35 \\ &= 637 - 18(6 \cdot 385 - 5 \cdot 455) \\ &= -108 \cdot 385 + 90 \cdot 455 + 1 \cdot 637. \end{aligned}$$