Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

(a) Es gelte $\{a, b\} = \{a, c\}$. Beweisen Sie, dass $b = c$ gilt.

(b) Es gelte $\{a, b, c\} = \{a, b, d\}$. Gilt dann $c = d$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung.

(a) Es gilt $b \in \{a, b\} = \{a, c\}$. Somit folgt $b = a$ oder $b = c$.

1. Fall: $b = a$. Es gilt auch $c \in \{a, c\} = \{a, b\} = \{b, b\} = \{b\}$. Somit gilt $c = b$ und auch $b = c$.

2. Fall: $b = c$. Dann bleibt nichts zu zeigen.

(b) Nein, beispielsweise für $a = c = 1, b = d = 2$ gilt $\{a, b, c\} = \{1, 2\} = \{a, b, d\}$, aber $c \neq d$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Seien A, B, C, D Mengen.

(a) Beweisen Sie $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subseteq (A \cup B) \cap (C \cup D)$.

(b) Kann man in (a) die Inklusion ($\subseteq$) durch eine Gleichheit ($=$) ersetzen?

Lösung.

(a) Sei $x \in (A \cap C) \cup (B \cap D)$. Dann gilt $x \in A \cap C$ oder $x \in B \cap D$. Wir haben also zwei Fälle:

1. Fall: $x \in A \cap C$. Dann gilt $x \in A$ und $x \in C$. Dann gilt aber auch $x \in A \cup B$ und $x \in C \cup D$. Somit folgt $x \in (A \cup B) \cap (C \cup D)$.

2. Fall: $x \in B \cap D$. Dann gilt $x \in B$ und $x \in D$. Dann gilt aber auch $x \in A \cup B$ und $x \in C \cup D$. Somit folgt auch in diesem Fall $x \in (A \cup B) \cap (C \cup D)$.

(b) Nein, man betrachte beispielsweise die Mengen $A = D = \emptyset$ und $B = C = \{0\}$. Dann gilt $(A \cap C) \cup (B \cap D) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. Andrerseits gilt aber $(A \cup B) \cap (C \cup D) = B \cap C = \{0\}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien A, B und C Mengen. Beweisen Sie die *de Morganschen Regeln*, d.h. zeigen Sie

(a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

(b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Lösung.

(a) Wir müssen zwei Inklusionen zeigen.

"$\subseteq$" Sei $x \in A \setminus (B \cup C)$. Dann gilt $x \in A$ und $x \notin B \cup C$. Letzteres bedeutet aber, dass $x \notin B$ und $x \notin C$ (wäre beispielsweise $x \in B$, so wäre auch

$x \in B \cup C$, ein Widerspruch). Also gelten $x \in A$ und $x \notin B$ sowie $x \in A$ und $x \notin C$. Das bedeutet aber $x \in A \setminus B$ und $x \in A \setminus C$, also $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

"$\supseteq$" Sei $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Dann gilt $x \in A \setminus B$ und $x \in A \setminus C$. Ersteres bedeutet $x \in A$ und $x \notin B$ und zweiteres $x \in A$ und $x \notin C$. Damit liegt x weder in B noch in C, also $x \notin B \cup C$. Insgesamt erhalten wir also $x \in A \setminus (B \cup C)$.

(b) Auch hier müssen wir zwei Inklusionen zeigen.

"$\subseteq$" Sei $x \in A \setminus (B \cap C)$. Dann gilt $x \in A$ und $x \notin B \cap C$. Letzteres bedeutet, dass $x \notin B$ oder $x \notin C$, denn sonst wäre $x \in B \cap C$. Wir haben also zwei Fälle:

1. Fall: $x \notin B$. Dann gilt $x \in A$ und $x \notin B$, also $x \in A \setminus B$. Somit folgt auch $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

2. Fall: $x \notin C$. Dann gilt $x \in A$ und $x \notin C$, also $x \in A \setminus C$. Somit folgt auch $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

"$\supseteq$" Sei $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Dann gilt $x \in A \setminus B$ oder $x \in A \setminus C$. Wir haben also wieder 2 Fälle:

1. Fall: $x \in A \setminus B$. Dann gilt $x \in A$ und $x \notin B$. Da $B \cap C \subseteq B$ gilt auch $x \notin B \cap C$ und somit $x \in A \setminus (B \cap C)$.

2. Fall: $x \in A \setminus C$. Dann gilt $x \in A$ und $x \notin C$. Da $B \cap C \subseteq C$ gilt auch $x \notin B \cap C$ und somit $x \in A \setminus (B \cap C)$.

Aufgabe 4 (2 Punkte)**.** Seien A und B Mengen mit der Eigenschaft

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B.$$

Bestimmen Sie $A \cap B$ und beweisen Sie die Gültigkeit Ihrer Formel.

Lösung. Wir behaupten $A \cap B = \emptyset$. Da $\emptyset \subseteq A \cap B$ gilt, genügt es zu zeigen, dass $A \cap B \subseteq \emptyset$. Wir nehmen also an, dass $x \in A \cap B$ und zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt. Da $x \in A \cap B$, gilt $x \in A$ und $x \in B$. Dann gilt also auch $x \in A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Wir haben also 2 Fälle:

1. Fall: $x \in A \setminus B$. Dann gilt $x \in A$ und $x \notin B$. Aber wir haben schon gezeigt, dass $x \in B$, ein Widerspruch (es kann nicht gleichzeitig gelten, dass $x \in B$ und $x \notin B$).

2. Fall: $x \in B \setminus A$. Dann gilt $x \in B$ und $x \notin A$. Aber wir haben schon gezeigt, dass $x \in A$, ein Widerspruch.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Seien A und B Mengen. Welche der folgenden Gleichheiten gelten? Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) $A \cap B = B \setminus (B \setminus A)$,

(b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

Lösung.

(a) Wir behaupten, dass die Gleichheit in (a) gilt. Wir müssen also zwei Inklusionen zeigen.

"$\subseteq$" Sei $x \in A \cap B$. Dann gilt $x \in A$ und $x \in B$. Somit gilt also $x \notin (B \setminus A)$ (denn sonst wäre $x \notin A$, ein Widerspruch). Daraus folgt also $x \in B \setminus (B \setminus A)$.

"$\supseteq$" Sei $x \in B \setminus (B \setminus A)$. Dann gilt $x \in B$ und $x \notin B \setminus A$. Wir behaupten, dass $x \in A$. Falls $x \notin A$, so wäre $x \in B \setminus A$, ein Widerspruch. Also gilt $x \in A$. Damit haben wir aber gezeigt, dass $x \in A$ und $x \in B$, also $x \in A \cap B$.

(b) Wir zeigen, dass (b) im Allgemeinen falsch ist, indem wir ein Gegenbeispiel angeben: $A = \{0\}, B = \{1\}, C = \emptyset$. Dann gilt $(A \cup B) \setminus C = A \cup B = \{0, 1\}$ und $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = A \cap B = \emptyset$.