Wiederholungsaufgaben

Die Wiederholungsaufgaben geben einen Überblick über alle bisher behandelten Themen in der Vorlesung *Elemente der Mathematik*. Die Abgabe der Wiederholungsaufgaben ist freiwillig, wird jedoch allen sehr empfohlen. Die Wiederholungsaufgaben müssen EINZELN abgegeben werden. Wer alle Aufgaben bearbeitet hat und insgesamt die Hälfte der möglichen Punkte erreicht, erhält 12 BONUSPUNKTE, die zusätzlich für die Zulassung zählen.

Schöne Weihnachten!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie eine Formel für $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \cdot k$ und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Gegeben sei ein Dreieck mit Seiten a, b und c. Beweisen Sie per Widerspruchsbeweis oder Kontrapositionsbeweis die Umkehrung des Satzes von Pythagoras, d.h. falls $a^2 + b^2 = c^2$, so ist der Winkel zwischen a und b ein rechter Winkel.[1]

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie oder finden Sie ein Gegenbeispiel:

(a) $A \cup (B \triangle C) = (A \cup B) \triangle (A \cup C)$

(b) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $f : M \to N$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f^{-1}(f(X)) = X$ für alle $X \subseteq M$ gilt.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Für eine Menge I (genannt *Indexmenge*) und Mengen A_i (für $i \in I$) definieren wir

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}.$$

[1] Sie dürfen dazu alles verwenden, was in im Geometrieunterricht in der Schule behandelt worden ist.

(a) Verwenden Sie das Induktionsprinzip für endliche Mengen um zu zeigen, dass falls I endlich ist, und A_i endlich ist für jedes $i \in I$, dann ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ endlich.

(b) Seien I und J Indexmengen. Gilt die Gleichheit

$$\bigcup_{i \in I \cap J} A_i = \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{j \in J} A_j\Big)?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (3 Punkte)**.** Wir definieren eine aussagenlogische Operation $\uparrow$ durch die Wahrheitstafel

X	Y	$X \uparrow Y$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{W}$

Zeigen Sie, dass man alle aussagenlogischen Operationen alleine durch $\uparrow$ ausdrücken kann.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Welche der folgenden Funktionen sind injektiv/surjektiv/bijektiv?

(a) $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], p \mapsto p'$, wobei $\mathbb{R}[x]$ die Menge aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ und einer Unbekannten x ist, und f die Ableitungsfunktion.[2]

(b) $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, x \mapsto x \cdot |x|$, wobei

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Welche der folgenden aussagenlogischen Terme sind Tautologien? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $Y \wedge (\neg X \to \neg Y) \to X$

(b) $Y \to (Z \to X) \vee \neg X.$

Aufgabe 9 (3 Punkte)**.** Seien M und N Mengen und $f : M \to N$ bijektiv. Geben Sie eine bijektive Funktion von $\mathcal{P}(M)$ nach $\mathcal{P}(N)$ an.

[2] Ein Polynom hat die Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$ für $0 \leq i \leq n$.

Aufgabe 10 (4 Punkte)**.** Wählen Sie jeweils die richtige Antwort.[3]

richtig	falsch	
☐	☐	Die Funktion $\mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M), X \to M \setminus X$ ist bijektiv.
☐	☐	Falls S und T dieselbe Wahrheitstafel besitzen, so haben auch $S \vee T$ und $S \wedge T$ dieselbe Wahrheitstafel.
☐	☐	"7 ist gerade" ist hinreichend, aber nicht notwendig für "$1 = 2$".
☐	☐	Falls $\{a, \{b\}\} = \{c, \{d\}\}$, so gilt $a = c$ und $b = d$.

[3]Falsche Antworten geben Abzug. Eine negative Punktezahl ist jedoch nicht möglich.

Neue Aufgaben

Dies sind die regulären Aufgaben vom Blatt 9.

Aufgabe 39 (3 Punkte, Prüfungsaufgabe SoSe 2016)**.** Zeigen Sie die Gleichheit

$$1010\ldots1010_2 = \frac{2(4^n-1)}{3},$$

wobei die Ziffergruppe 10 im Binärystem genau n-mal hintereinander steht.

Aufgabe 40 (5 Punkte)**.** Berechnen Sie

(a) die 7-adische Darstellung von 4972.

(b) $13431_5 + 42344_5$ und $123_5 \cdot 234_5$ im 5er-System.

(c) die 3-adische und die 27-adische Darstellung von 5420368_9, ohne die Zahl ins 10er-System umzuschreiben.

Aufgabe 41 (10 Punkte)**.** Ähnlich wie die b-adische Darstellung einer natürlichen Zahl führen wir die Darstellung im Faktoriellensystem ein. Wir definieren $0! := 1$ und

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n.$$

Für natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ mit $a_k \leq k$ für $1 \leq k \leq n$ sei

$$a_n \ldots a_{1!} := a_n \cdot n! + a_{n-1} \cdot (n-1)! + \cdots + a_2 \cdot 2! + a_1 \cdot 1!.$$

(a) Berechnen Sie

$$531311_! + 420120_!$$

und stellen Sie das Ergebnis im !-System dar.

(b) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! < (n+1)!.$$

(c) Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl eine eindeutige Darstellung im Faktoriellensystem besitzt.

(d) Welche Vor- oder Nachteile könnte das Faktoriellensystem im Vergleich mit den b-adischen Systemen haben?

Abgabe: Donnerstag, 12.01.2017 um 14:00