Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf Übungsblatt 8

Aufgabe 33 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie folgende Identitäten durch vollständige Induktion:

(a) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}, n \geq 2$.

Aufgabe 34 (2 Punkte)**.** Einem Bonner Mathematikstudenten ist es endlich gelungen, die erste These der Julirevolution ("Alle Menschen sind gleich") wissenschaftlich zu beweisen. Ist nämlich M eine Menge mit endlich vielen Elementen, so gilt $a = b$ für $a, b \in M$.

Beweis durch Induktion:

- *Induktionsanfang:* Hat M genau ein Element, $M = \{a\}$, so ist die Aussage richtig.
- *Induktionsannahme* (IA): Die Aussage sei richtig für alle Mengen mit genau n Elementen.

  Induktionsschluss: Es sei M' eine Menge mit genau $n + 1$ Elementen. Für $b \in M'$ sei $N := M' \setminus \{b\}$. Die Elemente von N sind nach (IA) einander gleich. Es bleibt zu zeigen, dass $b = c$ für $c \in M'$. Dazu entfernt man ein anderes Element d aus M' und folgert dann $b \in M' \setminus \{d\}$. Die Elemente dieser Menge sind nach (IA) wiederum einander gleich. Wegen der Transitivität der Gleichheitsbeziehung folgt dann die Behauptung. (Transitivität: $a = b$ und $b = c$ implizieren $a = c$)

Was ist falsch an diesem Schluss?

Aufgabe 35 (3 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass die Ebene $\mathbb{R}^2$, die durch endlich viele Geraden geteilt wird, mit zwei Farben so eingefärbt werden kann, dass je zwei benachbarte Teile (d.h. mit einer gemeinsamen Kante) nie von der gleichen Farbe sind.

Aufgabe 36 (3 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Summe der Innenwinkel eines n-Ecks, und beweisen Sie Ihre Formel mit Hilfe des Prinzips der vollständigen Induktion.

Aufgabe 37 (6 Punkte)**.** Wir definieren $0! := 1$ und für $n \geq 1$

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots n.$$

Weiter definieren wir die *Binomialkoeffizienten* durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!}, n \geq k.$$

(a) Erklären Sie informell, wieso $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ ist.

(b) Begründen Sie die Formel $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ mit Hilfe von (a).

(c) Beweisen Sie die Formel in (b) mit Hilfe von vollständiger Induktion.
Hinweis: Beweisen Sie zuerst die Gleichheit $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Abgabe: Donnerstag, 22.12.2016 um 14:00