

Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf

Übungsblatt 7

Aufgabe 29 (8 Punkte). Für eine Menge M ist die *Potenzmenge* von M definiert als

$$\mathcal{P}(M) := \{X \mid X \subseteq M\},$$

also die Menge aller Teilmengen von M .

- (a) Berechnen Sie $\mathcal{P}(\emptyset), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ sowie $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$.
- (b) Beweisen Sie, dass die Potenzmenge einer endlichen Menge ebenfalls eine endliche Menge ist.
- (c) Sei $|M| = \mu$. Berechnen Sie die Kardinalität von $\mathcal{P}(M)$.
- (d) Sei $f : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass f nicht surjektiv ist. Betrachten Sie dazu die Menge $X := \{x \in M \mid x \notin f(x)\}$.
- (e) Folgern Sie, dass es für jede Kardinalzahl μ eine Kardinalzahl ν gibt mit $\nu > \mu$.

Bemerkung: Aus (e) folgt, dass es eine Kardinalzahl grösser als $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ gibt. Beispielsweise ist die Kardinalität von $\mathbb{R}$ grösser als $\aleph_0$.

Aufgabe 30 (6 Punkte). Sei M eine endliche Menge und $f : M \rightarrow M$ eine Funktion.

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe eines Induktionsargumentes, dass falls f injektiv oder surjektiv ist, f bereits bijektiv ist.
- (b) Sei f bijektiv. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-mal}} = \text{id}_M.$$

- (c) Gelten (a) und (b) auch falls M unendlich ist?

Hinweis für (b): Verwenden Sie Präsenzaufgabe 1.

Definition. Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G, \circ)$, wobei G eine Menge ist und $\circ : G \times G \rightarrow G$ eine Verknüpfung mit den folgenden Eigenschaften:

- (G1) $(g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k)$ für alle $g, h, k \in G$
- (G2) es gibt $e \in G$ (das *neutrale Element*), sodass $g \circ e = e \circ g = g$ für alle $g \in G$
- (G3) für jedes $g \in G$ gibt es g^{-1} (das zu g *inverse Element*) mit $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

$(G, \circ)$ heisst *abelsch*, falls $\circ$ kommutativ ist; d.h. $g \circ h = h \circ g$ für alle $g, h \in G$.

Aufgabe 31 (4 Punkte). Die *Symmetriegruppe* S_3 des Dreiecks besteht aus allen Bewegungen (Spiegelungen, Drehungen und Kombinationen davon), die ein gleichseitiges Dreieck auf sich selbst an der selben Stelle in der Ebene abbilden.

- (a) Geben Sie alle Elemente von S_3 anhand einer Skizze an.
- (b) Zeigen Sie, dass $(S_3, \circ)$ eine Gruppe ist, wobei $\circ$ die Komposition von Funktionen ist. Geben Sie dazu eine Verknüpfungstabelle¹ an.
- (c) Ist S_3 abelsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe: Donnerstag, 15.12.2016 um 14:00

¹Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Verknüpfungstafel>