Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf Übungsblatt 5

Definition. Sei $f : M \to N$ eine Funktion. Für $X \subseteq M$ definieren wir das *Bild* von X durch

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in N \mid \text{ es gibt ein } x \in X \text{ mit } y = f(x)\}$$

und für $Y \subseteq N$ definieren wir das *Urbild* von Y durch

$$f^{-1}(Y) := \{x \in M \mid f(x) \in Y\}.$$

Aufgabe 20 (4 Punkte)**.** Sei $f : M \to N$ eine Funktion und seien $X, Y \subseteq N$. Zeigen Sie folgende Gleichheiten:

(a) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

(b) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

Aufgabe 21 (5 Punkte)**.** Sei $f : M \to N$ eine Funktion.

(1) Zeigen Sie die Gleichheit $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ für alle Teilmengen $X, Y \subseteq M$.

(2) Zeigen Sie, dass $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ genau dann für alle $X, Y \subseteq M$ gilt, wenn f injektiv ist.

Aufgabe 22 (6 Punkte)**.** Seien M, N, P und Q Mengen und sei

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & N \arrow[d, "t"] \\ P \arrow[r, "g"'] & Q \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm, d.h. $t \circ f = g \circ s$. Seien f und g bijektiv.

(a) Zeigen Sie, dass s genau dann injektiv ist, wenn t injektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass s genau dann surjektiv ist, wenn t surjektiv ist.

(c) Reicht es in (a) bzw. (b) lediglich vorauszusetzen, dass f (resp. g) injektiv/surjektiv ist? Etwas genauer, was sind die minimalen Anforderungen an f und g, damit (a) und (b) gelten?

Aufgabe 23 (2 Punkte)**.** Geben Sie eine bijektive Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ an. Inwiefern bedeutet das, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ "gleich gross" sind und was ist daran paradox?

Aufgabe 24 (1 Punkt)**.** Seien M, N, P Mengen. Beweisen Sie die Gleichheit

$$M \times (N \cap P) = (M \times N) \cap (M \times P).$$

Abgabe: Donnerstag, 01.12.2016 um 14:00