

Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf

Übungsblatt 4

Aufgabe 15 (3 Punkte).

- (a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{15}$ irrational ist.
- (b) Wieso funktioniert der Beweis nicht, wenn man 15 durch 9 ersetzt?

Aufgabe 16 (3 Punkte). Zeigen Sie per Widerspruch, dass wenn drei Zahlen x, y und z irrational sind, so gibt es unter diesen Zahlen mindestens zwei Zahlen, deren Summe auch irrational ist.

Hinweis: Beachten Sie, dass Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten rationaler Zahlen wieder rational sind.

Aufgabe 17 (2 Punkte). Seien X, Y Mengen und E eine „Eigenschaft“, die von $x \in X$ und $y \in Y$ abhängt. Finden Sie je ein mathematisches und ein nicht-mathematisches Beispiel, das veranschaulicht, dass (1) und (2) nicht dasselbe ausdrücken.

- (1) $\forall x \in X \exists y \in Y : E(x, y)$
- (2) $\exists y \in Y \forall x \in X : E(x, y)$

Aufgabe 18 (6 Punkte). Seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Funktionen. Zeigen Sie folgende Aussagen:

- (a) Beweisen Sie, dass falls f und g surjektiv sind, auch $g \circ f$ surjektiv ist.
- (b) Beweisen Sie, dass falls $g \circ f$ surjektiv ist, auch g surjektiv ist.
- (c) Falls $g \circ f$ surjektiv ist, ist dann auch f surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 19 (4 Punkte).

- (a) Zeigen Sie, dass $f(x) := x + [x]$ injektiv ist, wobei $[x]$ die sogenannte *Gaußklammer* bezeichnet, welche folgendermassen definiert ist:

$$[x] := \text{grösstes Element der Menge } \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

Ist $g(x) := x - [x]$ auch injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (b) Zeigen Sie, dass $h(x) := 3x^2 + 6x + 13$ auf $(-1, \infty)$ injektiv ist.

Abgabe: Donnerstag, 24.11.2016 um 14:00