

Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf

Übungsblatt 3

Aufgabe 11 (6 Punkte). Betrachten Sie die Aussagen

- (1) Wenn es schneit, so ist es kalt.
- (2) Wenn es nicht kalt ist, so kann es nicht schneien.
- (a) Drücken Sie (1) und (2) durch aussagenlogische Terme aus.
- (b) Beweisen Sie, dass (1) und (2) dasselbe ausdrücken.
- (c) Erläutern Sie, wie man die in (b) bewiesene Tatsache als Beweismethode (die sogenannte *Kontraposition*) verwenden kann.
- (d) Verwenden Sie diese Beweismethode, um Folgendes zu beweisen:

Sei a eine natürliche Zahl. Wenn a^2 eine ungerade Zahl ist, so ist auch a ungerade.

Hinweis: eine natürliche Zahl a ist genau dann gerade, wenn es eine natürliche Zahl k gibt mit $a = 2 \cdot k$.

Aufgabe 12 (6 Punkte). Seien X, Y und Z aussagenlogische Variablen.

- (a) Zeigen Sie, dass $((X \vee Y) \wedge (X \rightarrow Z) \wedge (Y \rightarrow Z)) \rightarrow Z$ eine Tautologie ist.
- (b) Erläutern Sie, wieso (a) verwendet werden kann, um Beweise durch Fallunterscheidung zu machen.
- (c) Die *symmetrische Differenz* von A und B ist definiert als

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Zeigen Sie per Fallunterscheidung, dass $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Aufgabe 13 (2 Punkte). Seien S und T zwei aussagenlogische Terme. Zeigen Sie, dass S und T genau dann dieselbe Wahrheitstafel haben, wenn $S \leftrightarrow T$ eine Tautologie ist.

Aufgabe 14 (4 Punkte). In der Mengenlehre möchte man alle mathematischen Objekte als Mengen darstellen. So definiert man für a und b das *geordnete Paar* als

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass aus $(a, b) = (c, d)$ bereits $a = c$ und $b = d$ folgt.
- (b) Argumentieren Sie kurz, warum die Eigenschaft aus (a) die Bezeichnung “geordnetes Paar” rechtfertigt.
- (c) Zeigen Sie, dass die Eigenschaft aus (a) für die (ungeordnete) Paarmenge nicht gilt, d.h. $\{a, b\} = \{c, d\}$ impliziert nicht $a = c$ und $b = d$.