

Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf

Übungsblatt 12

Dies ist das letzte Übungsblatt in diesem Semester. Wir wünschen Ihnen schöne Ferien!

Aufgabe 49 (5 Punkte).

- (a) Beweisen Sie die *geometrische Summenformel*: Für jede Zahl $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

- (b) Verwenden Sie (a) um zu zeigen, dass, falls $2^p - 1$ eine Primzahl ist (für $p \in \mathbb{N}$), bereits p eine Primzahl ist ($2^p - 1$ ist dann eine sogenannte *Mersenne-Primzahl*). Gilt auch die Umkehrung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Betrachten Sie dazu die ersten fünf solchen Zahlen und verwenden Sie das Sieb des Erasthotenes.

Aufgabe 50 (4 Punkte). Überprüfen Sie, welche der Gruppenaxiome in den folgenden Beispielen erfüllt sind: Finden Sie dazu jeweils ein passendes neutrales Element e (falls es existiert) und überprüfen Sie jeweils auch, ob die Operation kommutativ ist.

- (a) $(\mathbb{N}, \text{kgV}, e)$
(b) $(\mathbb{Z}, \circ, e)$, wobei $x \circ y := x + 2y$
(c) $(\mathbb{R}, \odot, e)$, wobei $x \odot y := x + y + xy$.

Aufgabe 51 (4 Punkte). Sei $(G, *, e)$ eine Gruppe mit und sei $x \in G$ ein fest gewähltes Element. Wir definieren eine weitere Verknüpfung auf G durch

$$a \odot b := a * x * b.$$

- (a) Finden Sie ein Element $e' \in G$, sodass $(G, \odot, e')$ eine Gruppe ist.
(b) Zeigen Sie, dass $(G, \odot, e')$ genau dann abelsch ist, wenn $(G, *, e)$ abelsch ist.

Aufgabe 52 (2 Punkte). Sei $(G, *, e)$ eine Gruppe mit der Eigenschaft, dass $a^2 = e$ für alle $a \in G$.¹ Zeigen Sie, dass $(G, *, e)$ abelsch ist.

¹ $a^2 := a * a$

Aufgabe 53 (3 Punkte). Sei $G = \{a, b, e\}$ eine Menge mit 3 verschiedenen Elementen. Zeigen Sie, dass es genau eine Möglichkeit gibt, eine Operation auf G zu definieren, sodass e das neutrale Element ist. Ist G abelsch?