# Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf Übungsblatt 10

**Aufgabe 45** (4 Punkte)**.** Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a, b > 0$. Beschreiben Sie, wie sich die Primfaktorzerlegung von $\mathrm{ggT}(a, b)$ und $\mathrm{kgV}(a, b)$ aus der Primfaktorzerlegung von $a$ und $b$ ergibt und zeigen Sie die Gleichheiten

$$\mathrm{ggT}(a^2, b^2) = (\mathrm{ggT}(a, b))^2$$
$$\mathrm{kgV}(a^2, b^2) = (\mathrm{kgV}(a, b))^2.$$

**Aufgabe 46** (6 Punkte)**.** Für $a, n \in \mathbb{N}$ sei $A_n = a^{2^n} + 1$.

(a) Zeigen Sie, dass für $m > n$ in $\mathbb{N}$, $A_n \mid (A_m - 2)$.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(A_m, A_n)$ für $m > n$ in $\mathbb{N}$.

(c) Verwenden Sie (b) um zu beweisen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

**Aufgabe 47** (3 Punkte)**.** Für natürliche Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ definieren wir rekursiv

$$\mathrm{ggT}(a_1, \dots, a_n) := \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a_1, \dots, a_{n-1}), a_n).$$

Wir nennen $a_1, \dots, a_n$

- *teilerfremd*, falls $\mathrm{ggT}(a_1, \dots, a_n) = 1$,
- *paarweise teilerfremd*, falls für alle $i \neq j$ in $\{1, \dots, n\}$, $\mathrm{ggT}(a_i, a_j) = 1$.

Zeigen Sie, dass es für jedes $n \geq 3$ natürliche Zahlen $a_1, \dots, a_n$ gibt, die teilerfremd sind, aber $\mathrm{ggT}(a_i, a_j) \neq 1$ für alle $i \neq j$.

*Hinweis: Verwenden Sie die Existenz unendlich vieler Primzahlen.*

**Aufgabe 48** (5 Punkte)**.** Für $a \in \mathbb{N}$ sei $d(a)$ die Anzahl der Teiler von $a$.

(a) Zeigen Sie die Gleichheit $d(a \cdot b) = d(a) \cdot d(b)$ für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Gilt die Gleichheit auch, falls $a$ und $b$ nicht teilerfremd sind?

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für eine Zahl

$$a = \prod_{i=0}^{k-1} p_i^{e(p_i)}$$

in Primfaktorzerlegung

$$d(a) = \prod_{i=0}^{k-1} (e(p_i) + 1)$$

gilt.

Abgabe: Donnerstag, 26.01.2017 um 14:00