

Elemente der Mathematik - Winter 2016/2017

Prof. Dr. Peter Koepke, Regula Krapf

Übungsblatt 10

Aufgabe 42 (7 Punkte). Seien $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ sowie $g = \text{ggT}(a, b)$ und $k = \text{kgV}(a, b)$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

- (a) Falls $g = 1$ und $a \mid bc$, so folgt $a \mid c$.
- (b) $\text{ggT}\left(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}\right) = 1$.
- (c) Falls $a \mid c$ und $b \mid c$, so folgt $\frac{a \cdot b}{g} \mid c$.
- (d) $a \cdot b = g \cdot k$.

Aufgabe 43 (6 Punkte). Die *Fibonacci-Zahlen* sind rekursiv definiert durch

$$f_1 = 1, f_2 = 1 \text{ und } f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \text{ f\"ur } n \geq 1.$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (a) $\text{ggT}(f_n, f_{n+1}) = 1$ f\"ur $n \geq 1$
- (b) $f_{n+m} = f_{m+1}f_n + f_m f_{n-1}$ f\"ur $n \geq 2$ und $m \geq 1$
- (c) falls $n \mid m$ so folgt $f_n \mid f_m$.

Aufgabe 44 (5 Punkte).

- (a) Berechnen Sie den ggT von 2378 und 1769 und stellen Sie ihn als Linearkombination von 2378 und 1769 dar.
- (b) Der ggT von drei nat\"urlichen Zahlen a, b und c ist definiert als

$$\text{ggT}(a, b, c) := \text{ggT}(\text{ggT}(a, b), c).$$

Zeigen Sie, dass der ggT assoziativ ist, d.h.

$$\text{ggT}(\text{ggT}(a, b), c) = \text{ggT}(a, \text{ggT}(b, c))$$

- (c) Bestimmen Sie den $\text{ggT}(385, 455, 637)$ und finden Sie ganze Zahlen x, y und z , die der Gleichung

$$\text{ggT}(385, 455, 637) = 385x + 455y + 637z$$

gen\"ugen.

Abgabe: Donnerstag, 19.01.2017 um 14:00